

Goldbach Cephesinde Son Durum...

Christian Goldbach, 7 Haziran 1742'de Euler'e yazdığı mektubunda ünlü tahminini, bugün ifade ettiğimiz şekliyle 2'den büyük her çift sayının iki tane asal sayının toplamı şeklinde yazılabileceğini, dile getirmişti. Euler, doğru olduğundan şüphesi olmadığını, fakat kanıtlayamadığını söylüyordu cevabında. Euler'den sonra binlerce matematikçi aynı tecrübeyi yaşadı. Bugün ise bu tahminin doğruluğu konusunda Euler'den daha emin olduğumuz halde, kimse ne doğruluğunu ne de yanlışlığını ispatlayabilmiş durumda. Bir kitap yayımcısının, kitaba reklam amacıyla koyduğu 1 milyon dolar tutarındaki ödül bakalım bu tahminin ispatına yardım edecek mi?

Goldbach tahmininin ispatı konusunda mektuplar yağmaya devam ediyor. Fakat bu ay da gereken ispatı tamamlayan yok. Goldbach tahmini 2'den büyük her çift sayının iki asal sayının toplamı şeklinde yazılabileceğini söylüyordu. Matematikte kullanılan ispat yöntemlerinde, genellikle teorem verildiği şekilde değil de, daha değişik bir şekle sokularak ispatlanmaya çalışılır. Örneğin Goldbach tahminini "1'den büyük her sayıya eşit uzaklıkta olan iki asal sayı vardır" şeklinde düşünmek de olası. Bunun daha değişik bir ifadesi de "1'den büyük her sayının iki asal sayının aritmetik ortalaması olduğu". Gerçi tahminin bu şekilde değiştirilmesi ispatı basitleştirmiyor; ama olaya daha değişik açıdan bakmamızı sağlıyor.

Adıyaman'dan Ahmet Ziya Bayhan, İstanbul'dan Selçuk Atay, Aksaray'dan Hüseyin Gök, İzmir'den Burtay Mutlu ve Gebze'den Mustafa Demir, probleme bu şekilde yaklaşmayı tercih etmişler. Ama hepsinde de verilen bir tamsayıdan eşit uzaklıkta olan iki asal sayı olduğunun kanıtı verilmemiş ya da örnekleyerek gösterilmeye çalışılmış.

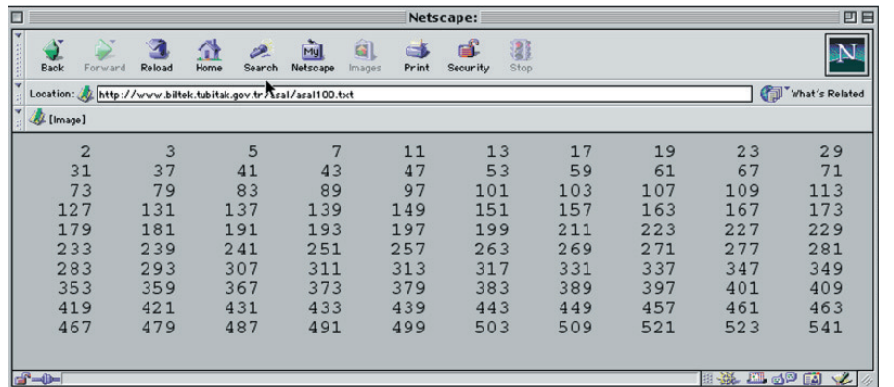
Mustafa Demir ile Ankara'dan Güçlü Güney, probleme "olmayana ergi" metodu ile yaklaşıyorlar. Bildiğiniz gibi bu ispat tekniğinde amaç, gösterilmek istenen teoremin yanlış olduğu varsayımından hareket edilerek matematiksel olarak mümkün olmayan bir sonuca ulaşmak ($1=0$ gi-

bi). Ancak yanlış varsayımlar yapılarak yanlış sonuca ulaşılabilirliği için teoremin doğru olduğu gösterilmiş oluyor. Güçlü Güney, yaklaşımında $2n$ tamsayısının iki asalın toplamı olarak yazılamadığını varsayıyor. Buradan $2n$ sayısından küçük her asal p için, $2n-p$ sayısının bileşik olduğunu söylüyor. Fakat bu aşamadan sonra, $2n$ 'in kendinden küçük bütün asal sayılar tarafından bölünmesi gerektiği sonucunu çıkarıyor. Arkadaşımızın ispatının hatalı olduğu tek nokta burası. Bildiklerinden böyle bir sonuca varması mümkün değil. Arkadaşımızın düşünce biçimi, küçük kusuru dışında güzel.

Denizli'den Fatih Yeşildal ise 3'ten büyük tüm asal sayıların ya $6x+1$ ya da $6y+5$ formunda olduğundan hareket ediyor. Fakat sonra bütün bu sayıların asal olduğunu iddia etmiş. Bunun yanlış olduğunu bir kaç örnek ile görmek olası. $6.4+1=25$ ve $6.5+5=35$ sayıları bu formlarda;

ama asal değiller. İstanbul'dan Coşar Avar iki tane tek asal sayının toplamının çift olduğunu söylüyor. Geçen ay belirttiğimiz gibi bunun doğru olduğunu biliyoruz. Herhalde okurumuz dergi eline geçmeden mektubunu bize gönderdi.

Adıyaman'dan Orhan Tan arkadaşımız, geçen aylarda tavsiye edilen bir tekniğe alternatif sunuyor. Arkadaşımıza göre, sözkonusu çift sayı eğer bir sayının karesi ise bu sayıdan küçük en büyük asal sayı alındığında iki sayının farkı asaldır diyor. Bu doğru olsa bile Goldbach tahmininin ispatı değil. Goldbach, istisnasız tüm çift sayıların, tam kare olsun ya da olmasınlar, iki asalın toplamı şeklinde yazılabileceğini söylüyordu. Arkadaşımızın iddiasının doğru olmadığını göstermek için en iyi örnek ise 100 'ün karesi 10000 . 10000 'den küçük en büyük asal sayı 9973 ve $10000-9973=27$ asal değil. Aynı şekilde 10000 'den küçük ikinci



The screenshot shows a Netscape browser window displaying a table of the first 100 prime numbers. The table is organized in a grid format with 10 columns and 10 rows. The primes are listed in ascending order from 2 to 541.

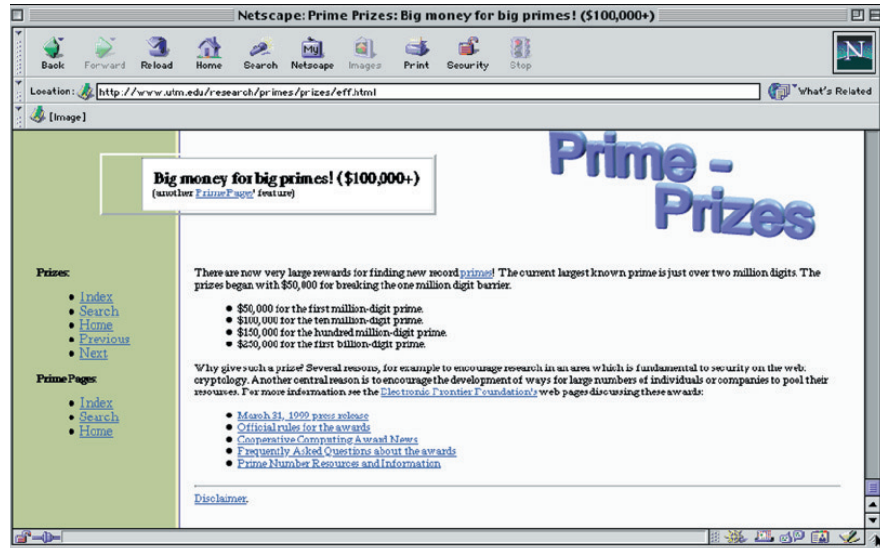
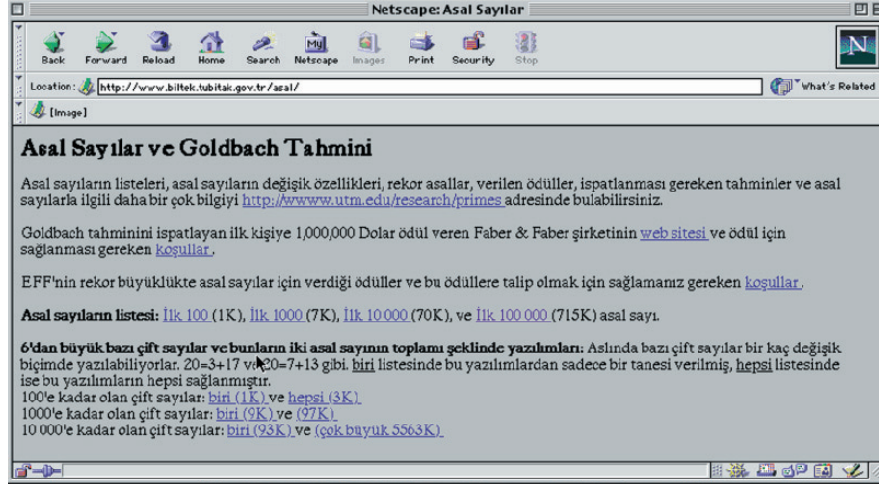
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541

www.biltek.tubitak.gov.tr/asal sayfasında bulabileceğiniz ilk 100 asal sayı

büyük asal sayı 9967 ve 10000 – 9967=33 yine asal değil.

Bu örnekler aslında bize iddia ettiğimiz her özelliğin bir ispatını vermemiz gerektiğini söylüyor. Sadece bir kaç, ya da bir sürü örnek verip bir şeyin doğru olduğunu iddia etmek ispat sayılmaz. Aksi halde birisi bir gün kalkıp iddiamıza aykırı bir örnek verir ve "ispatımız" suya düşer. Goldbach tahmini de aslında aynen böyle bir şey. Şu anda 400 trilyona kadar olan tamsayılar için iddianın doğru olduğu biliniyor. Ama bu bile tahminin doğru olduğu anlamına gelmez. Kimbilir, belki iddia yanlıştır ve birisi bir gün kalkıp iki asalın toplamı şeklinde yazılamayan bir tamsayı bulur gelir. Eğer iddiayı ispatlamak istiyorsanız, birisinin böyle bir şey yapamayacağını açıkça göstermek zorundasınız.

Çanakkale'den Gökçe Engin, Bebek'ten Elif Alagöz, İzmir'den Yusuf Kaya, Yozgat'tan Ali İhsan Parlak, bize çözümlerini gönderen diğer arkadaşlar. Bu arkadaşlarımız da tahminin doğruluğunu şüpheye yer bırakmayacak bir biçimde göstermişler. Kırşehir'den Sedat Han, sıkça yapılan ama görülmesi zor bir hatayı tekrarlıyor. Özetlemek gerekirse, arkadaşımız verilen bir çift sayıdan küçük başka bir çift sayının, iki asal sayının toplamı olduğunu gösteriyor. İspatı yaparken, bütün çift sayıların bu özelliğe sahip olduğunu göstermek gerekiyor. Bir tane istis-



na, tahminin yanlış olduğu anlamına gelir. Orhan Tosun'un analizi güzel; ama matematiksel kesinlikte ispat eksik.

Asal sayılarla ilgili bir konuda Güçlü Tugay bir sorusunu iletti. Arkadaşımız, elinde istediği kadar büyük asal sayı üreten bir program olduğunu söylüyor. Bu da sayılar teorisinin ilginç problemlerinden biri: Pratikte kullanılabilir ve kesinlikle asal sayıları verebilen bir algoritma. Böyle algoritmalar olduğu biliniyor; ama hiç kimse bugüne kadar pratikte kullanılabilecek bir tanesini üretmeyi başaramamış. Eğer arkadaşımızın dediği doğruysa, 10 milyon ve daha yukarı ondalık basamaklı asal sayılar üreterek oldukça büyük miktarlarda para kazanabilir. Yalnız burada sorun, bulduğunuz bu sayının asal olduğunu bir şekilde göstermeniz gerekiyor. Verilen bir sayının asal olduğunu göstermenin oldukça kullanışlı bir kaç değişik yöntemi var.

Bu ve buna benzer bilgileri ve asal sayılar konusunda konulan diğer ödülleri <http://www.utm.edu/research/primes> adresinden öğrenebilirsiniz. Biz sadece 'Elektronik Sınırlar Vakfı' EFF'nin verdiği ödülleri burada ilan edelim: 10 milyon ondalık basamaklı ilk asal sayıyı bulana 100,000 dolar, 100 milyon basamaklı ilk asal sayıyı bulana 150,000 dolar, 1 milyar basamaklı ilk asal sayıyı bulana 250,000 dolar ödül verilecek. Bu ödüllerin güzel tarafı ülkelere göre ayrımcılık yapmamaları. EFF aslında bilgisayar dünyasında özgürlükleri savunan bir vakıf. Vakfın büyük asallarla ilgisiyse, veri iletişiminde kullanılan bazı kriptografik tekniklerin büyük asal sayıları kullanmaları. Vakıf, asallar hakkında araştırmaları teşvik ederek bu kriptografik teknikleri güçlendirmek amacıyla bu tip ödülleri veriyor.

Sadi Turgut

Bazı web sitelerinin adresleri
<http://www.biltek.tubitak.gov.tr/asal/>: Bu adreste bazı asal sayılar ve bazı çift sayıların iki asalın toplamı şeklinde yazılışlarının listelerini bulabilirsiniz.

<http://www.utm.edu/research/primes/>: Asal sayılar hakkında bilmek isteyeceğiniz bir çok şey bu sitede var. Küçük asal sayıların listesi, bilinen en büyük asal sayılar, büyük sayıların asal olup olmadıklarını ispatlamak için yöntemler vs.

<http://www.eff.org/coop-awards/award-prime-rules.html>: EFF'nin en büyük asal sayı rekorunu kıranlara verdiği ödüllerin detaylarını bu sitede bulabilirsiniz.