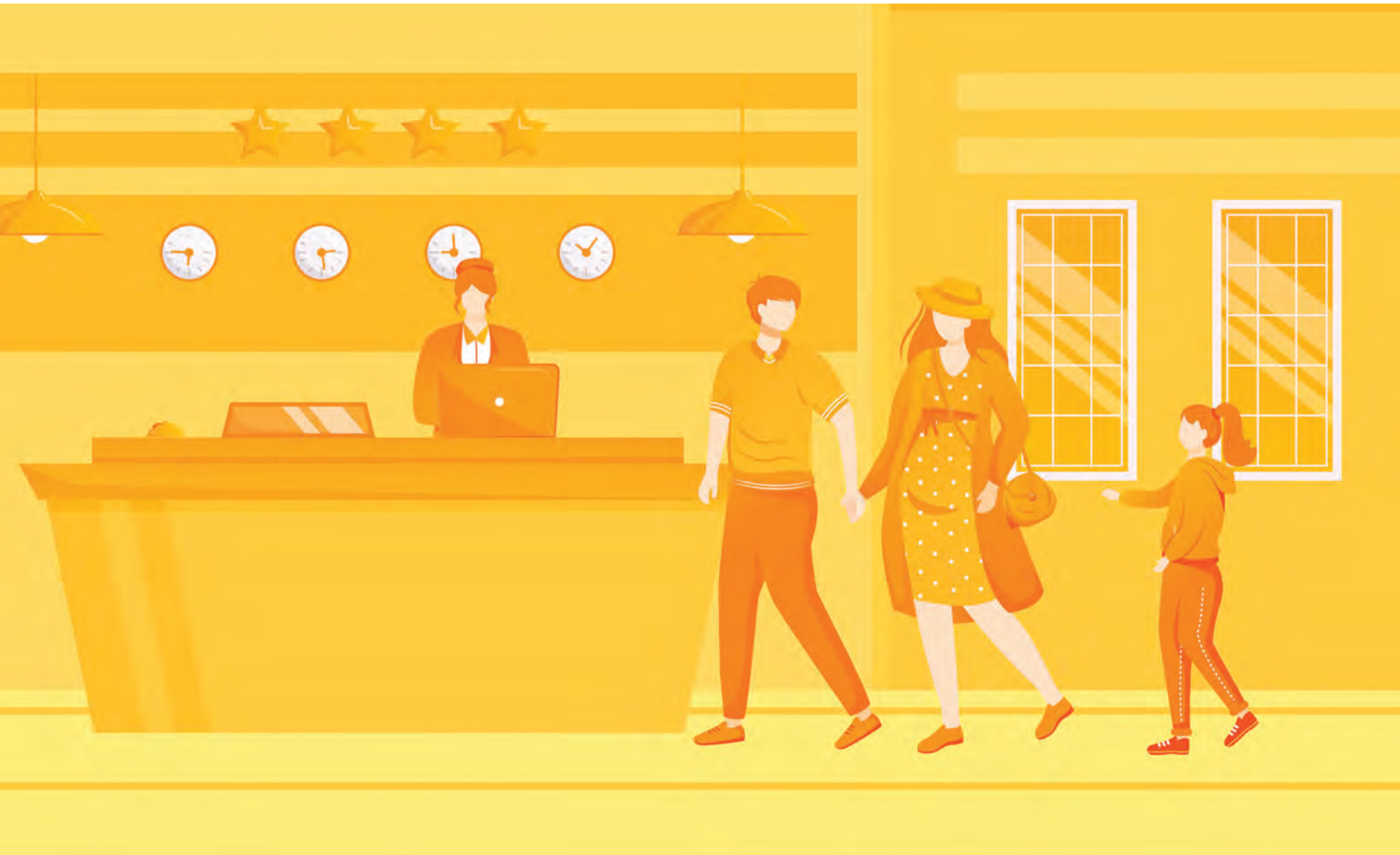
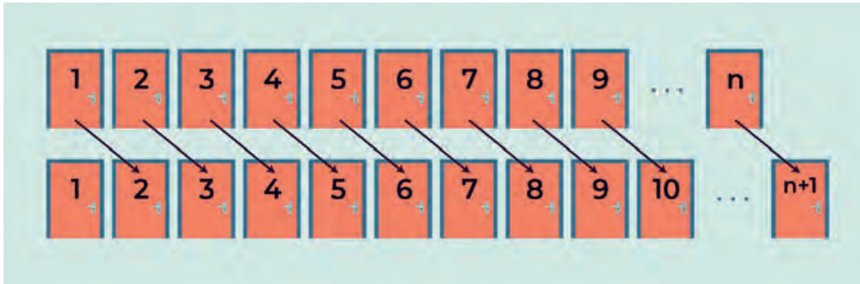
Hilbert'in Sonsuz Otel Paradoksu

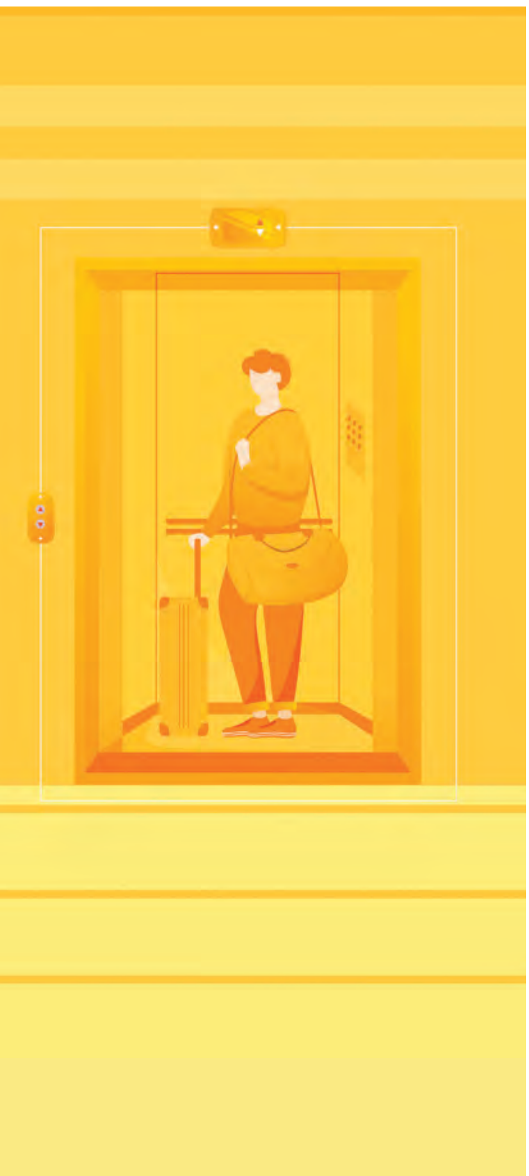
Dr. Elif Ebren Kaya [*TÜBİTAK Bilim Genç*



Sonsuz sayıda odasının tümü dolu olan bir otel düşünelim. Resepsiyona gelen yeni bir müşteriye bu otelde nasıl yer bulabilirsiniz? Peki, sonsuz sayıda yolcusu olan bir otobüsteki kişiler bu otelde konaklayabilir mi?



Hilbert'in otelinde sonsuz sayıda oda vardır ve bu odalar 1, 2, 3, … şeklinde pozitif tam sayılarla numaralandırılır. Tüm odaların dolu olduğu bir hafta sonu otele rezervasyonu olmayan bir müşteri gelir ve bir oda ister. Resepsiyon görevlisi, bu müşteriyi geri çevirmek istemez ve ona bir oda bulmaya karar verir. Nasıl mı?



Öncelikle Hilbert'in otelinde hiçbir zaman boş oda bulunmaz ancak yeni müşteriler için her zaman yer bulunabilir. Bu çelişkili durum sonsuzluk kavramıyla ilgilidir. Alman matematikçi David Hilbert'in bu düşünce deneyi, bizlere imkânsız gibi görünen sonuçlara nasıl ulaşılabildiğini sonsuzluk kavramının incelikleriyle gösteriyor.

Gelelim şimdi yukarıdaki sorunun cevabına.

Görevli 1. odada kalan kişinin 2. odaya, 2. odadakinin 3. odaya, 3. odadakinin ise 4. odaya taşınmasını ister. Bu şekilde devam edildiğinde n. odadaki kişi, n+1. odaya geçmiş olur. Böylece 1 numaralı oda boşalır ve görevli yeni gelen müşteriye bu odayı verebilir. Hilbert'in otelinde sonsuz sayıda oda olduğu için her yeni gelen müşteriye bu şekilde bir yer bulunabilir. Aslında burada mevcut oda numaralarından oluşan küme ile yeni oda numaralarından oluşan küme arasında yukarıdaki gibi birebir eşleme yapılır.

Fakat oda sayısı sınırlı olan herhangi bir otelde -otelin ne kadar çok odası olursa olsun- bu yöntemin işe yaramayacağını hepimiz biliyoruz. Çünkü sınırlı bir otelde en büyük numaralı odada kalan kişinin taşınabileceği yeni bir oda bulunmaz.

Peki, bu otele "Sonsuzluk Turizm" isimli sonsuz sayıda yolcusu olan bir otobüs gelirse bu otobüsteki kişilere otelde yer bulunabilir mi?

Evet, otel dolu olmasına rağmen bu otobüsteki kişilere de otelde yer bulunabilir ama yukarıdaki yöntemle değil. Çünkü 1. odadaki kişi yüz milyon sonraki odaya ve diğer odadakiler daha sonraki odalara taşınsa bile sadece bu yüz milyon kişiye oda bulunur. Fakat geriye hâlâ yerleşmeyi bekleyen sonsuz sayıda insan kalır. Bu durumda görevli sonsuz sayıda kişiye oda bulmak için başka bir yöntem uygulamalıdır. Sizce bu yöntem nasıl olmalı?

Eğer yeteri kadar düşündüyseniz resepsiyon görevlisinin izleyeceği yeni yöntemi inceleyelim.

Görevli 1. odada kalan kişinin 2. odaya, 2. odadakinin 4. odaya, 3. odadakinin ise 6. odaya taşınmasını ister. Bu şekilde devam edildiğinde n. odadaki kişi, 2n. odaya geçmiş olur. Yani pozitif tam sayılar kümesi ile pozitif çift tam sayılar kümesi arasında birebir eşleme yapılır. Böylece oteldeki tüm kişiler çift numaralı yeni odalara taşınır ve tek numaralı odalar boş kalır. Şimdi otele yeni gelen otobüsteki yolcular, boş olan tek numaralı odalara 1. koltuktaki kişi 1. odaya, 2. koltuktaki kişi 3. odaya, 3. koltuktaki kişi 5. odaya olacak şekilde yerleşebilir. Yani bu otobüste n. koltukta oturan kişi, 2n-1 numaralı odaya yerleşir. Böylece otobüsteki tüm kişiler otelde kalabilir.

Şimdi tüm odaları dolu olan Hilbert'in oteline sonsuz sayıda yolcu taşıyan "Sonsuzluk Turizm" isimli otobüslerden sonsuz tane geldiğini düşünelim ve tüm yolculara konaklayabilecekleri bir odayı nasıl bulabileceğimizi öğrenelim.

Aslında bir önceki sorunun sadece bir adım ötesinde olan bu problem, asal sayıların sonsuzluğu ile çözülür.

Bu problemin çözümüne, daha önce olduğu gibi, oteldeki tüm müşterilerden kaldıkları oda numaralarının iki katına eşit olan odaya taşınmaları istenerek başlanır. Böylece

Sonsuz tane asal sayı vardır.

2, 3, 5, 7, 11, … şeklinde devam eden, kendisinden ve 1'den başka pozitif böleni olmayan 2 ve 2'den büyük asal sayılar sonsuzdur. Tüm asal sayıları tek tek sayamayacağımıza göre sonsuz tane asal sayı olduğunu göstermenin tek yolu onu ispat edebilmektir.

1'den büyük her doğal sayının bir veya daha fazla asal sayının çarpımı şeklinde yazılabileceğini biliyoruz. Bu ifade aslında "aritmetiğin temel teoremi" olarak bilinir. İspatımızda bu teoremi kullanacağız.

Asalların sayıca sonlu olduğunu kabul edelim ve bu asal sayıları P_1, P_2, P_3, … , P_s , … , P_r ile gösterelim. En büyük asal sayımız Pr, asal sayılarımız arasındaki ilişkiyse $P_1 < P_2 < P_3 < \dots < P_s < \dots < P_r$ şeklinde olsun. Örneğin $P_1=2$, $P_2=3$, $P_3=5$, …

Tüm asalların çarpımı ile oluşturduğumuz sayıya N sayısı diyelim: $N = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \dots \cdot P_s \cdot \dots \cdot P_r$.

N sayısından 1 eksilterek oluşturduğumuz (N-1) sayısı, aritmetiğin temel teoremi gereği, bir veya daha fazla asal sayının çarpımına eşittir. Bu durumda (N-1) sayısı, sonlu tane olan asal sayılarımızdan (P_1, P_2, P_3, …, P_s, …, P_r) en az biri ile tam bölünür. Farz edelim ki P_s asal sayısı (N-1)'i tam böler.

N sayısı tüm asal sayıların çarpımından oluştuğu için P_s asal sayısı, N sayısını da kalansız olarak böler. Çünkü P_s asal sayısı, N sayısının çarpanlarından biridir.

P_s asal sayısı hem N sayısını hem de (N-1) sayısını böldüğü için (N-(N-1)) sayısını da böler. (Bu önermenin doğruluğundan şüphe ediyorsanız yazının sonundaki ispatı inceleyebilirsiniz.) Fakat (N-(N-1)) sayısı aslında 1'e eşittir ve P_s asal sayısının 1'i bölebileceği sonucu yanlıştır. Çünkü 1 sayısının kendisinden başka böleni yoktur.

O hâlde ispatta bir şeyler yanlış gitmiştir. Fakat ispatın ilk cümlesindeki "asalların sayıca sonlu olduğu" varsayımından sonraki tüm satırlar mantıksal olarak doğrudur. Bu nedenle aslında ilk cümle doğru değildir. Sonuç olarak, asal sayıların sonlu olduğunu kabul etmek yanlıştır, asal sayılar sonsuzdur.

İspatımıza sonsuz tane asal sayı bulunduğunu göstermek için bu önermenin yanlış olduğunu kabul ederek başladık ve bu fikrin bir çelişkiye yol açtığını gösterdik. Burada kullandığımız ispat yöntemi matematikte "olmayana ergi yöntemiyle ispat" veya "çelişki ile ispat" olarak isimlendirilir.

Önerme: a, b, c $\in \mathbb{Z}^+$ (b>c) olmak üzere, eğer a sayısı hem b sayısını hem de c sayısını bölüyorsa (b-c) sayısını da böler.

İspat: a sayısı hem b hem de c sayılarını böldüğü için $b=a \cdot g$ ve $c=a \cdot h$ olacak şekilde g, h pozitif tam sayıları bulunur. Yani g, h $\in \mathbb{Z}^+$. (b-c) sayısı yerine yukarıda b ve c için elde ettiğimiz eşitlikleri kullanırsak, $(b-c)=a \cdot g-a \cdot h=a \cdot (g-h)$ şeklinde yazabiliriz. Sonuç olarak, a sayısı (b-c) sayısının bir çarpanıdır yani a sayısı (b-c) sayısını böler.

yeniden tek numaralı odalar boş kalır. Yeni gelen otobüslerden biri koltuk sırasına göre ilk tek asal sayı olan 3 ve 3'ün kuvvetlerine eşit odalara yerleşir.

Yani otobüsün 1. koltuğundaki kişi 3 numaralı odaya, 2. koltuğundaki kişi 9. odaya (3^2=9), 3. koltuğundaki kişi 27. odaya (3^3=27) ve bu şekilde n. koltuktaki kişi 3^n numaralı odaya yerleşir. Yeni gelen diğer bir otobüsün yolcuları ise koltuk sırasına göre 5 ve 5'in kuvvetlerine eşit odalara yerleşir. Yani otobüsün 1. koltuğundaki kişi 5. odaya, 2. koltuğundaki kişi 25. odaya (5^2=25), 3. koltuğundaki kişi 125. odaya (5^3=125) ve n. koltuğundaki kişi 5^n. odaya yerleşir. Sırasıyla diğer otobüslerdeki yolcular 7, 11, 13, ... şeklinde sonsuz sayıda olan asal sayıların kuvvetlerine eşit odalara yerleşebilir. Böylece bu son zorlu problem de çözülmüş olur.

Peki asal sayıların kuvvetlerine eşit oda numaralarının her zaman boş olacağını nasıl biliyoruz? İşte bu sorunun cevabı aritmetiğin temel teoreminde gizli. Çünkü pozitif her tam sayı, asal sayıların çarpımı şeklinde benzersiz olarak yani tek bir şekilde yazılabilir. Bu durumda herhangi bir oda numarası bir asal sayının kuvveti ise başka bir asal sayının kuvvetine eşit olamaz. Ayrıca tek asal sayıların hiçbir kuvveti ikiye bölünemez ve bu odalar boş olduğu için yeni bir misafir kabul edebilir.

Son olarak bütün yerleştirmeler tamamlandığında ikinin katı ve herhangi bir asal sayının kuvvetine eşit olmayan sonsuz sayıda odanın boş kaldığını fark etmişsinizdir. Örneğin 1, 15, 21, 33, 35, 39, 45, … numaralı odalar gibi. Yani, son anda gelen her yeni müşteri de bu otelde konaklayabilir.

Bu yazı TÜBİTAK'ın dijital popüler bilim yayını olan Bilim Genç'te yayınlanmıştır.

Kaynaklar

https://plus.maths.org/content/hilberts-hotel
https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_KqkI9Zo
https://primes.utm.edu/notes/proofs/infinite/kummers.html