Üçüncü Boyutun Sakinleri

Çokyüzlüler

Gizem ve güzellik. Bu iki özelliktir insanların ilgisini çokyüzlüler üzerine çeken; daha birçok matematiksel konuda olduğu gibi. Kimileri yaşamı, doğayı açıklamaya çalıştı onlarla, kimileri sanatlarıyla bütünleştirdi. Matematikçilerse her zaman olduğu gibi sadece araştırdılar, hiçbir çıkar beklemeden.

Çokgensel düzlem parçalarıyla sınırlandırılmış cisimlere çokyüzlü denir. Bu düzlem parçalarına yüz, yüzlerin arakesitlerine ayrıt, üç veya daha çok ayrıtın birleştiği noktaya ise köşe denir.

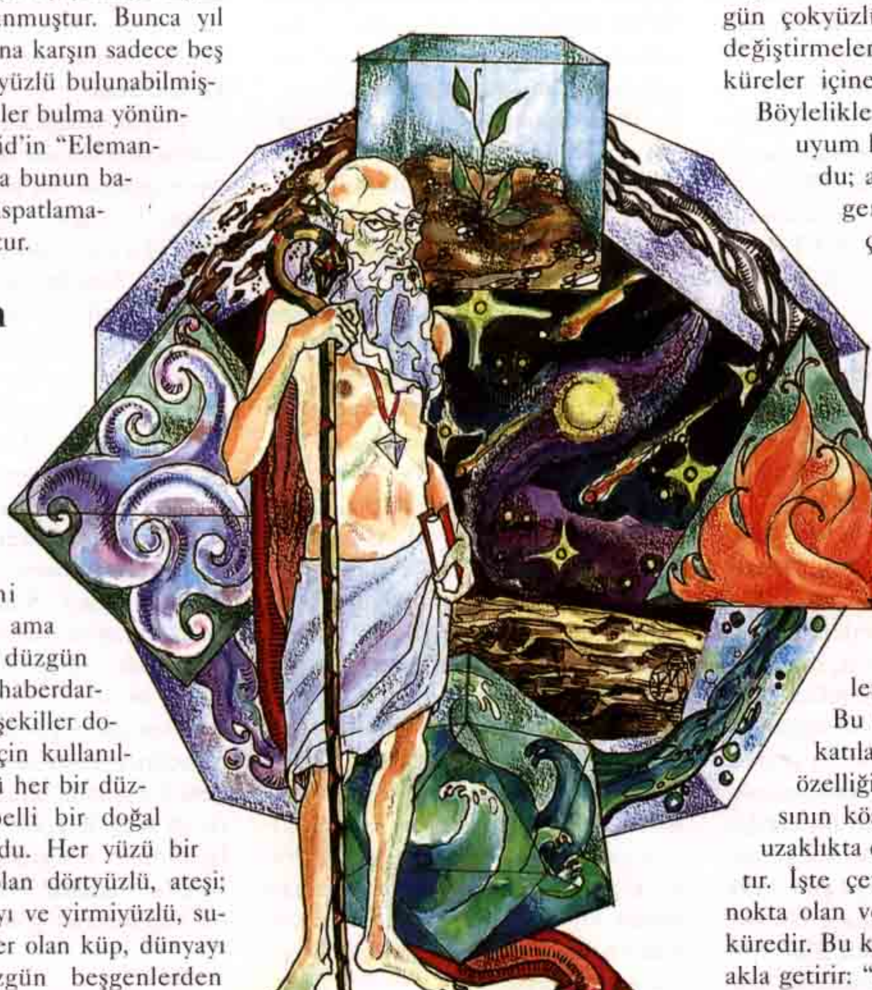
Çokyüzlüler içinde özellikle düzgün olanları insanların ilgisini çekmiştir. Bazı arkeolojik kazılarda binlerce yıl öncesine ait taştan yapılmış düzgün çokyüzlüler bulunmuştur. Bunca yıl uğraşılmış olmasına karşın sadece beş tane düzgün çokyüzlü bulunabilmiştir. Yeni çokyüzlüler bulma yönündeki çabalar, Öklid'in "Elemanlar" adlı kitabında bunun başarılamayacağını ispatlaması ile son bulmuştur.

Platon'un Beş Katı Cismi

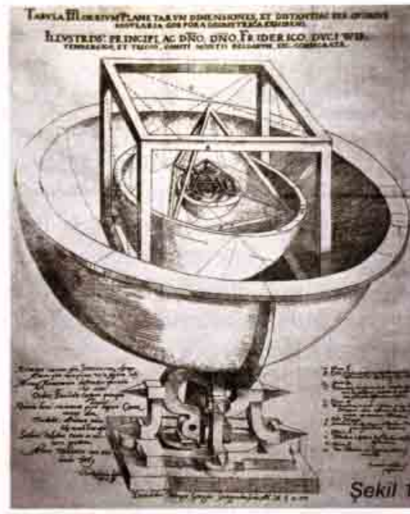
Platon belki başka düzgün çokyüzlü elde edilemeyeceğini ispatlayamamıştı ama oluşturulabilen düzgün çokyüzlülerden haberdardı. Ona göre, bu şekiller doğayı açıklamak için kullanılmalıydılar; çünkü her bir düzgün çokyüzlü belli bir doğal öğeyi simgeliyordu. Her yüzü bir eşkenar üçgen olan dörtyüzlü, ateşi; sekizyüzlü, havayı ve yirmiyüzlü, suyu; yüzleri kareler olan küp, dünyayı ve yüzleri düzgün beşgenlerden oluşan onikiyüzlü ise, evreni simgeliyordu. Platon "Timaus" adlı eserinde bu düşüncesini açıkladıktan sonra çokyüzlüler için şöyle diyordu:

"Tanrının onların sayıları, hareketleri ve diğer nitelikleri arasında uygun oranlar ayarladığını ve bu oranları tam bir mükemmellik içinde bir araya getirdiğini var saymalıyız."

O günden beri bu şekillere "Platon Katıları" adı verilir.



İllüstrasyon: Pınar Yoldaş



Şekil 1

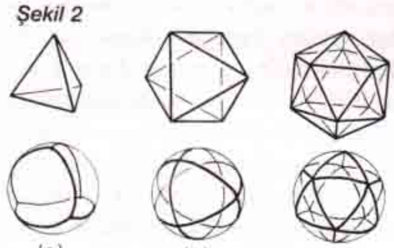
Kepler'in Güneş Sistemi Modeli

Kepler altı gezegenin varlığından haberdardı ve bu gezegenlerin yörüngelerinin çembersel olduğunu düşünüyordu. Kepler, altı gezegen ve beş düzgün çokyüzlü arasında bir bağlantı olduğunu düşündü. Düzgün çokyüzlüleri gezegenlerin yer değiştirmeleri gereken eşmerkezli küreler içine yerleştirdi (Şekil 1). Böylelikle Güneş Sistemi'nde bir uyum keşfettiğini düşünüyordu; ancak daha sonra gezegenlerin yörüngelerinin çembersel değil de eliptik olduğunu fark eden Kepler bu görüşten vazgeçti.

Portakalı Bölmek

Kepler'in çokyüzlüleri yerleştirdiği küreler, çevrel küreler olarak adlandırılırlar. Bu kürelerin varlığı Platon katılarının bir başka önemli özelliğidir. Her bir Platon katısının köşeleri bir noktadan eşit uzaklıkta olacak şeklide dağılmıştır. İşte çevrel küre, merkezi bu nokta olan ve köşelerden geçen bir küredir. Bu kürenin varlığı şu soruyu akla getirir: "Acaba bir portakalı klasik yöntemin (ortadan iki kesişte bölme) dışında eşit dört parçaya bölebilir miyiz?". Yanıt, bir düzgün dörtyüzlünün çevrel küresinde saklıdır. Eğer bu kürenin merkezine bir ışık kaynağı yerleştirirsek ve düzgün dörtyüzlünün kenarlarının küre üzerine gölgelerini düşürürsek birbirine eş dört parça elde ederiz (Şekil 2a). İşte bu parçalar yardımıyla küreyi (portakalı) dört eşit parçaya orjinal bir şekilde bölebiliriz. Kimbilir, belki bir gün bir işinize yarar. Tabii bu yöntem yardımıyla portakalımızı 6,8,12 ya da 20 eşit parçaya da bölebiliriz. Tek yapmamız gereken dörtyüzlü yerine diğer Platon katılarını kullanmak (Şekil 2/b,c).

Şekil 2



Konveks Çükyüzlülerde Euler Formülü

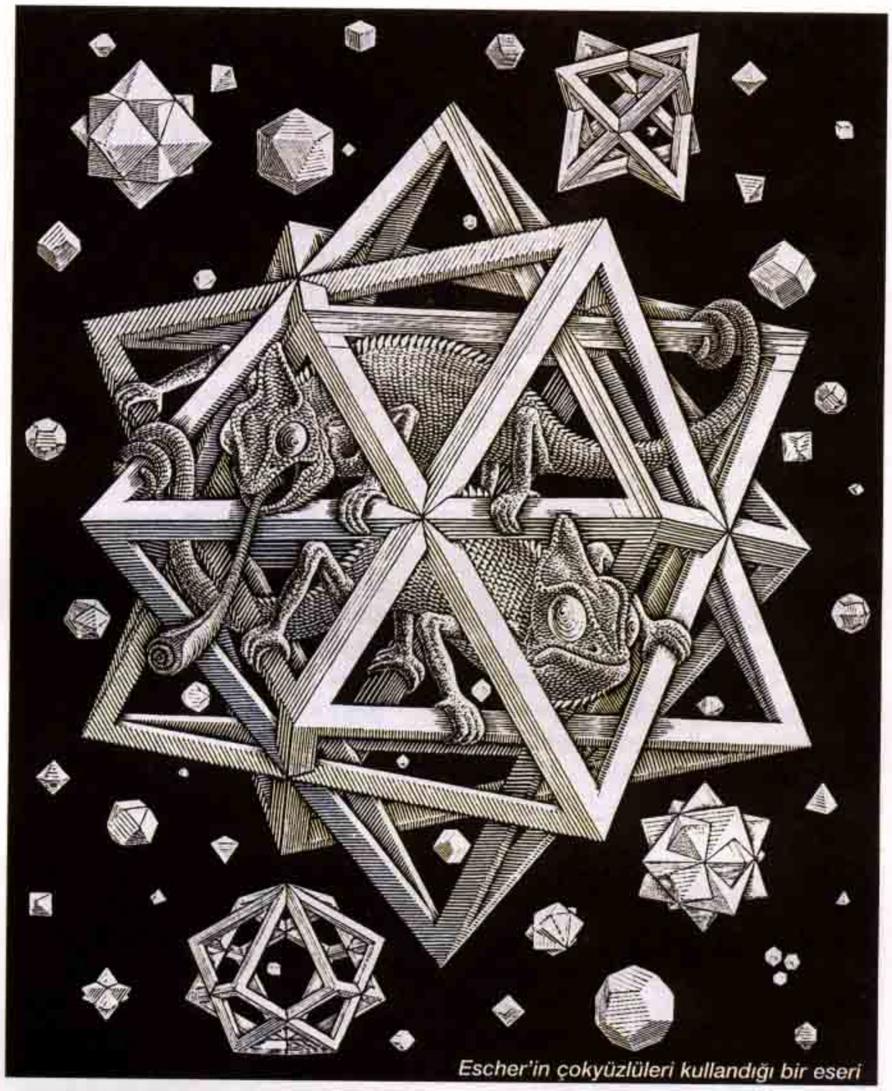
Eğer çokyüzlünün herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası yine bu çokyüzlünün içinde kalıyorsa, bu çokyüzlüye konveks (dışbükey) çokyüzlü denir. Konveks çokyüzlülerin yüz, ayrıt ve köşe sayıları arasında Euler teoremi olarak bilinen bir bağıntı vardır.

Köşe sayısı K, ayrıt sayısı A, yüz sayısı Y ve her bir köşede birleşen ayrıt sayısı q, her bir yüzü oluşturan ayrıt sayısı da p olmak üzere Platon katıları için bu verilerin bir tablosunu yapalım.

Çokyüzlü	Y	K	A	q	p
Dörtyüzlü	4	4	6	3	3
Küp	6	8	12	3	4
Sekizyüzlü	8	6	12	4	3
Onikiyüzlü	12	20	30	3	5
Yirmiyüzlü	20	12	30	5	3

Şimdi tablodaki sayılar yardımıyla her bir çokyüzlü için K+Y-A sayısını hesaplarsak her zaman sonucun 2 olduğunu görürüz. Bu sadece Platon katıları için değil tüm konveks çokyüzlüler için geçerli bir özelliktir.

Formülün ispatını tümevarım yöntemiyle yapacağız. Tümevarımı



Escher'in çokyüzlüleri kullandığı bir eseri

köşe sayısı üzerine uygulayalım. Yani formülün K tane köşeye sahip çokyüzlü için doğru olduğunu kabul edip, K+1 köşeli çokyüzlü için de doğru olduğunu gösterelim. Formülün 4 köşeli çokyüzlü için doğru olduğu açıktır:

K=4, Y=4, A=6 ise 4+4-6=2

Eğer yukarıda belirttiğimiz K köşeden K+1 köşeye geçişi yapabilirsek 4 köşeden 5'e, ondan 6'ya derken sonsuza kadar tüm konveks çokyüzlüler için ispat yapılmış olur.

K köşe sayılı konveks çokyüzlünün dışında bir M noktası alalım. Bu M noktası (K+1)'inci köşe olacak. M'yi çokyüzlünün uygun bir yüzünü oluşturan çokgenin tüm köşelerine birleştirelim. Şimdi yeni bir çokyüzlü elde etmiş olduk. Diyelim ki M'yi köşeleri ile birleştirdiğimiz çokgenin kenar sayısı t olsun. Böylece çokyüzlümüzün ayrıt sayısı t kadar artmış olur. Yeni çokyüzlünün yüzlerinin sayısı ise Y+t-1 olur, çünkü köşelerini M ile birleştirdiğimiz çokgen yüz, yeni çokyüzlünün içinde kalmış olur. Yeni çokyüzlümüz için A_S, K_S, Y_S sayıları şu şekilde oluşmuş olur:

$A_S = A+t$

$K_S = K+1$

$Y_S = Y+t-1$

$K_S+Y_S-A_S = K+1+Y+t-1-A-t$

$= K+Y-A$

$=2$

Sonuç olarak yeni çokyüzlümüz için de formülün geçerli olduğunu göstermiş olduk. Yani ispatımız tamamlanmış oldu.

Bazı bilim adamlarına göre, bu bağıntı Descartes'a aittir. Bunu ileri sürmelerinin sebebi de, Descartes'a ait olan bir teoremin doğrudan sonuçlarından birinin de yukarıdaki bağıntı olmasıdır. Ancak bu bağıntıyı ilk kez 1750 yılında açıkça ortaya atan kişinin Euler olduğu bilinmektedir. Euler'in amacı, çokyüzlüleri sınıflandırabilmekti. Ancak bunu yapabilmek için sadece yüzlerin sayısı yeterli değildi; ayrıt ve köşe sayıları da incelenmeliydi. İşte Euler incelemeleri sırasında bu üç sayı arasındaki bağıntıyı keşfetti. Bağıntının kesin ispatı ise ancak 1847 yılında C. von Saudt tarafından yapılabildi.

Sadece Beş Tane mi?

Sadece beş tane düzgün çokyüzlü bulunduğunun insanlar tarafından binlerce yıldır bilindiğini söylemiştik. Şimdi bunun neden böyle olduğunun matematiksel kesin bir ispatını yapalım.

Bir düzgün çokyüzlüde her köşede birleşen ayrıt sayısı q ile köşe sayısı olan K'nin çarpımı ya da her yüzün kenar sayısı p ile yüz sayısı Y'nin çarpımı bu çokyüzlünün ayrıt sayısının iki katını yani 2A'yı verir. Bu eşitliklerin yardımıyla Euler formülündeki K yerine 2A/q ve Y yerine 2A/p yazabiliriz.

K+Y-A= 2

2A/q+2A/p-A= 2 (2A ile sadeleştirelim).

1/A= 1/q+1/p-1/2

1/A pozitif olduğundan:

1/q+1/p > 1/2

olmalıdır. p ve q tanımlarından dolayı ikiden büyük sayılardır.

Bulduğumuz eşitsizlikten dolayı her ikisi birden, üçten büyük olamaz. Bu durumda en az biri, üç olmalıdır. Sonuçta olabilecek tüm {p, q} ikilileri şunlardır: {3,3}; {3,4}; {4,3}; {3,5}; {5,3}. Bu gösterime çokyüzlüler için Schläfli sembolü denir.

Elde ettiğimiz beş farklı Schläfli sembolü beş farklı düzgün çokyüzlüye karşılık gelir:

{3,3} düzgün dörtyüzlü
{4,3} küp
{3,4} düzgün sekizyüzlü
{5,3} düzgün onikiyüzlü
{3,5} düzgün yirmiyüzlü

Düzgün Çokyüzlülerde 'İkilik' İlişkisi

Dikkat edilirse küp ile sekizyüzlünün, onikiyüzlü ile yirmiyüzlünün ve dörtyüzlünün de kendisi ile Schläfli sembolleri birbirlerinin tersidir. Bu ilişkiye düzgün çokyüzlülerde 'ikilik' adı verilir. İkilik ilişkisine sahip iki çokyüzlü karşılaştırıldığında ayrıt sayılarının aynı olduğu, yüz ile köşe sayılarının ise karşılıklı yer değiştirdikleri görülür. (Örneğin, küp ile sekizyüzlünün oniki olan ayrıt sayıları aynı iken altı ve sekiz olan yüz sayıları ile köşe sayıları karşılıklı olarak yer değiştirmektedir.) Ayrıca aralarında ikilik ilişkisi bulunan çokyüzlülerden herhangi birisinin yüzlerinin orta noktaları birleştirildiğinde diğer çokyüzlü elde edilir. Aynı işlem yeni oluşan çokyüzlü için de tekrar edilirse birinciye benzer bir çokyüzlü elde edilir.

Çokyüzlüleri Hissetmek

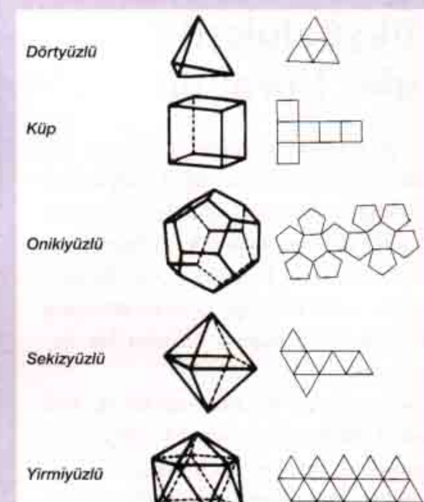
Çokyüzlüler, tüm bu güzelliklerinin ve ilginç özelliklerinin yanında anlaşılması güç şekillerdir. Bu da onların matematiksel yapılarından değil, insanların hayal edebilme güçlüklerinden kaynaklanmaktadır. Bir çokyüzlüyü göz önüne getirip ona herhangi bir açıdan bakabilmek oldukça güçtür. Hele de onikiyüzlü ya da yirmiyüzlü için bu iş daha da zordur. Düzgün olmayan, yıldız çokyüzlüleri söylemeye bile gerek yok. Belki de bu özellikleridir çokyüzlülerin sırlarının düzlem geometriye oranla daha sonraları keşfedilmiş olmasının nedeni.

İnsanlar çokyüzlülerle akıldan uğraşmanın çok zor olduğunun farkına varmış ve onların birer modellerini yapıp, bu modeller üzerinde çalışmaya karar vermişlerdir. Böylelikle bundan daha binlece yıl önce beş düzgün çokyüzlünün modellerini yapmayı başarmışlardır. Britanya Adaları'nda yapılan arkeolojik kazılarda Platon'dan bin yıl öncesine ait taştan yapılmış beş düzgün çokyüzlü modeli bulunmuştur.

Günümüzde de birçok kişi çokyüzlü modelleriyle uğraşmaktadır. Hatta Amerika'da birçok öğretmen, öğrencilerinin el becerilerini geliştirmelerini sağlamak için onlardan kendi başlarına düzgün onikiyüzlü ya da yirmiyüzlü modelleri yapmalarını istemektedir.

Bir de çokyüzlü modelleri yapma işini bir hobi hatta bunun da ötesinde bir sanat olarak görenler var. Bu insanlardan biri de, M. J. Wenninger. Polyhedron Models (Çokyüzlü Modelleri) adlı kitabın sahibi olan Wenninger, kitabında, kendi yapımı olan çokyüzlü modellerin birer resimlerini ve her biri hakkında verdiği çeşitli bilgileri toplamış. Wenninger, kartondan yaptığı modellerin her biri için ortalama sekiz saat harcadığını söylüyor. Tabii bu süre oldukça karmaşık olan yıldız çokyüzlüler için geçerli daha çok.


Wenninger tarafından hazırlanan iki yıldız çokyüzlü modeli



Beş Platon katısının modellerini elde edebilmek için kullanabileceğiniz planlar

Çokyüzlülerin iki boyutlu resimlerini elde etmek de artık daha kolay. Bilgisayar teknolojisi yardımıyla istenilen bir çokyüzlüyü alıp, onu istenilen açıda çevirip, istenilen büyüklükte bir çıktısını elde etmek mümkün. Bu tür programlara Internet üzerinden kolaylıkla ulaşılabiliyor.

Matematiğin üçüncü boyutu çoktan aştığı; yirminci, otuzuncu, hatta n'inci boyutlardan bahsettiği günümüzde, çokyüzlülerin modellerini yapmak, matematiksel bir uğraştan çok bir hobi halini almış durumda. İnsanlar daha çok bu mükemmel şekilleri tüm boyutlarıyla hissedebilmek için yapıyorlar bu modelleri. Evimizin bir köşesine koyacağımız, kendi yapımımız bir düzgün yirmiyüzlü konuklarımızı şaşırtsa da pek fena bir aksesuar olmazdı doğrusu.

Yıldız Çokyüzlüler

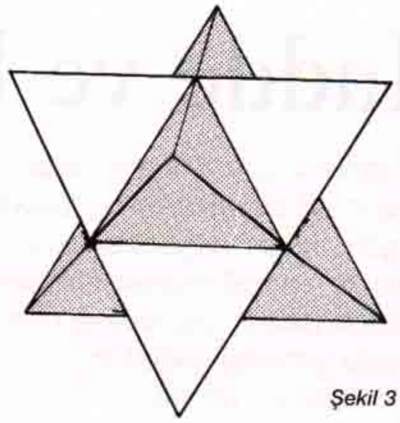
Çokyüzlüler ailesi sadece konveks çokyüzlülerle sınırlı değildir. Konveks çokyüzlülerin yüz düzlemlerinin uzatılarak kesiştirilmeleri ya da yüzlerinin üzerine dışa doğru piramitler oturtulmasıyla yeni çokyüzlüler oluşturulabilir. Konveks olmayan bu çokyüzlülere yıldız çokyüzlüler denir. Düzgün dörtyüzlü ve küpün yüzlerinin uzatılması ile yeni çokyüzlü elde edilemez, ancak düzgün sekiyüzlüden yüzlerin uzatılıp kesiştirilmesiyle fazladan sekiz tane dörtyüzlü içeren bir yıldız çokyüzlü elde edilir (Şekil 3).

Düzgün onikiyüzlüden ise, üç farklı yıldız çokyüzlü elde edilebilir. Bunlardan ikisi 1619 yılında Kepler tarafından diğeri ise 1809'da Poinsat tarafından keşfedilmiştir. Kepler tarafından bulunan yıldız onkiyüzlünün çiziminde düzgün konveks onikiyüzlünün her beşgeni yerine, beşgen bir piramit kullanılır. Bu beşgen piramit için, tabanı oluşturan beşgenin ayrıtı ile kenarı arasındaki oran, altın oran olarak da bilenen $(1+\sqrt{5})/2$ sayısıdır. Elde edilen yıldız onikiyüzlü, 12 beşgen piramit, 12 köşeye ve 30 ayrıta sahiptir. Ayrıca düzgün konveks çokyüzlülerde olduğu gibi bir kürenin içine çizilebilir.

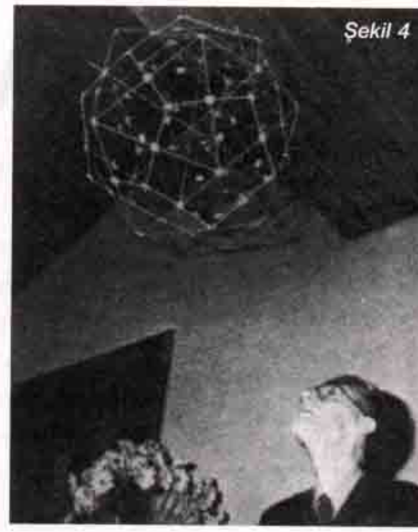
Konveks ve yıldız çokyüzlülerin güzellikleri, matematikle sanatı bir kez daha birleştirmektedir. Zaten matematiği bir bilimden çok sanat dalı olarak gören matematikçilerin sayısı hiç de az değildir.

Hem bir bilim adamı, hem de bir sanatçı olarak tanınan Leonardo da Vinci de 1509 yılında yayımlanan Luca Pacioli'nin "De Divina Proportione" (İlahi Oranti Üzerine) adlı eserindeki çokyüzlüleri çizmişti.

Yine oldukça ünlü bir sanatçı olan ve eserlerinde matematiksel birçok öğeyi kullanan Escher, çokyüzlülerden birçok eserinde yararlanmıştır. Hatta yeni stüdyosuna taşınırken birçok eserini bırakan Escher, kendi yapımı olan beş Platon katısı modelini yeni stüdyosuna götürmüştür (Şekil 4).



Şekil 3



Şekil 4

Çokyüzlülerde Simetri

Simetri çokyüzlülerin en önemli özelliklerinden biridir. Çokyüzlüler birden fazla simetri özelliğine sahiptirler ve belki de bu özellikleridir onları bu derece güzel yapan. Ne de olsa simetri insanoğlunun estetik anlayışının en önemli noktalarından biridir.

Dörtyüzlü, ayrıtların her birinden geçen altı tane simetri düzlemine sahiptir; ama simetri ekseni ya da simetri merkezi yoktur. Ayrıca dörtyüzlünün her bir köşesini karşı yüzün merkeziyle birleştiren doğruları eksen olarak alan ve 120°lik açılar altında oluşan döndürmeler, özdeş bir şekil sağlar.

Küp, dörtyüzlüye göre daha simetrik bir şekildir diyebiliriz. Çünkü küpün 9 simetri düzlemi, 26 simetri ekseni ve bir simetri merkezi vardır. 9 simetri düzleminden 6 tanesi karşılıklı ayrıtlardan 3 tanesi, ise karşılıklı kenarların ortalarından geçer. 26 simetri ekseninden 6 tanesini karşılıklı yüzeylerin merkezlerini birleştiren doğrular, 12 tanesini karşılıklı ayrıtların merkezlerini birleştiren doğrular ve 8 tanesini de karşılıklı köşeleri birleştiren doğrular oluşturur.

Çokyüzlülerin bunların dışında bulunmuş daha pek çok özelliği vardır. Sadece matematikte değil kimyada moleküllerin yapısının incelenmesinde, biyolojide birçok mikroorganizmanın açıklanmasında ve de mimarlıkta sağlam ve estetik yapıların yapımında oldukça yararlıdır çokyüzlüler. Gelecekte kim bilir daha ne gibi özellikleri bulunur ve daha ne gibi kullanım alanları bulurlar?

Escher'in çokyüzlüleri kullandığı bir başka eseri

Deniz Gündüz

Kaynaklar

Binor, B., "Düzgün Yirmiyüzlü Üzerine", *Bilim ve Teknik*, Sayı 357

Demirtaş, A., *Matematik Sözlüğü*, Bilim Teknik Kültür Yayınları, Ankara, 1986

Kappraff, J., *Connections*, McGraw Hill, ABD, 1991

Terzioğlu, F., *Tasarı Geometri*, Teknik Üniversite Yayınları, İstanbul, 1961

Thema Larousse, Cilt 3, Sayfa 188