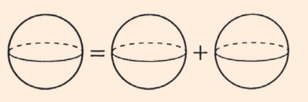
Banach-Tarski Paradoksu

Bu teorem insanı hayretler içinde bırakır:



İçi dolu bir küre sonlu sayıda parçaya ayrılır ve bu parçalar değişik bir şekilde yeniden birleştirilirse hacimleri ilkinin aynı 2 yeni küre elde edilir. Söylemeye gerek yok ki parçalar ölçülemeyen ve gözde canlandırılması zor kümelerdir. Yeni 2 küre de aynı şekilde parçalanabilir ve herbiri orijinal küre hacminde 4 küre oluşur. Bu operasyon sonsuza kadar tekrarlanabilir. Bu teorem bize matematiğin soyut dünyasında bu çeşit parçalamalar (disseksiyon) olabileceğini kanıtlar; fakat gerçek dünyada bunun nasıl yapılabileceğini söylemez. Eğer bu mümkün olsaydı bezelye kadar bir altın küre sonlu parçalamalar ve tekrar birleştirmelerle güneş kadar bir küre oluştururdu. Banach ve Tarski parça sayısından söz etmemişlerdi. R.M. Robinson olası en küçük parça sayısının 5 olduğunu gösterdi. Robinson şunu da gösterdi bir küre yüzeyi S, öyle iki parçaya ayrılabilir ki bu parçaların herbiri S kadardır. 2S elde etmek için 4 parça yeterlidir.

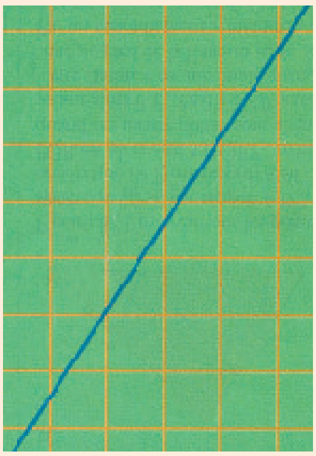
Banach-Tarski'nin genel ifadesi: 3 boyutlu Öklid uzayında A ve B sınırlı kümelerse ve A ve B'nin iç noktaları varsa, A öyle sonlu sayıda parçaya ayrılabilir ki bu parçaların kaydırma veya rotasyonla tekrar birleştirilmesi B ile çakışan (kongrüent) bir küme oluşturur.

Stefan Banach (1892-1945) Polonyalı matematikçi; Alfred Tarski (1902-?) Polonya kökenli Amerikalı matematikçi.

Hırsız Cambaz

Tony eski bir Ortaçağ kilisesine geldiğinde, tavandan sarkan altınla kaplı iki ip gördü. Bunlar çan çalmak içindi ve tavandaki iki delikten geçerek çan kulesine gidiyorlardı. İki deliğin arasında 25 cm. bir uzaklık vardı. Çan kulesinin kapısı 3 anahtarla açılıyordu. İpleri kuleye girerek çalmak olanaksızdı. Tony her iki ipi çalmak istiyordu. İplerden birine tırmanıp diğer ipi kesmek ona yalnız 1 ip kazandırırdı; oysa o iki ipi de istiyordu. Tepesine tırmandığı 2. ipi tabii ki kesemezdi; bacakları kırılırdı. Tony düşüne düşüne bir çare buldu ve 2 ipin hemen hemen tamamını çalıp evine götürdü. Ne yapmıştı?

Irmak ve Şehirler



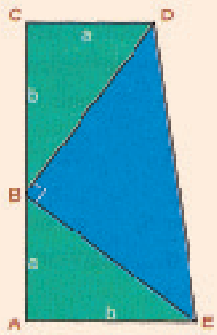
Bu hayali ülke l69x260 km boyutlarında bir dikdörtgendir. Ülke 1 km²'lik şehirlere ayrılmış. Köşegenlerinden biri doğrultusunda bir ırmak akıyor. Bu ırmak kaç şehirden geçer? (Köşeye değmeler geçiyor sayılmayacak). Bu problemi pxq için genelleyiniz.

Düzlemin Bölünmesi

Bir düzlem 6 doğru tarafından en çok kaç bölgeye bölünebilir? Bir düzlem 6 daire tarafından en çok kaç bölgeye bölünebilir?

n doğru ve n daire için genelleyiniz.

Çok İspatlı Bir Teorem



Amerikan Cumhurbaşkanlarından James Abram Garfield, görülen şekil üzerinde Pisagor teoremini ispatlamıştır. Bu ispatı bulabilirmisiniz? (Pisagor teoreminin çok sayıda ispatı vardır.)

Çok Yüzlüler

Düzgün konveks bir çokyüzlnün herhangi bir yüzü, yatay bir zemin üzerinde taban olabilir. Düzgün konveks çok yüzlünün ağırlık merkezi, merkezidir; bu nedenle düzgün konveks bir çokyüzlü (küp, oktahedron, dekahedron vb) herhangi bir yüzü üzerinde dengededir. Düzgün olmayan çokyüzlü bazı yüzleri üzerinde dengede, diğerleri üzerinde dengede değildir. Öyle bir çok yüzlü yapılabilirmi ki, hiçbir yüzü üzerinde dengede kalamasın?

Pi'nin Cambazlıkları

π sayısını yalnız daire ile birlikte düşünenler yanılıyor. Her taşın altından π çıkar. Doğal sayıların terslerinin karelerinin toplamı $\pi^2/6$, 4. kuvvetlerinin terslerinin toplamı $\pi^4/90$, 6. kuvvetlerinin terslerinin toplamı $\pi^6/945$'dir. 1736'da Euler gösterdi ki doğal sayıların terslerinin 2k. kuvvetlerinin toplamı π^{2k}. N'dir. $N = (-1)^{k-1} B_{2k}. 2^{2k-1}/(2k)!$ gibi bir rasyonel sayı. B_{2k} Bernouilli sayılarıdır. Gauss'un çan biçimi olasılık eğrisinin altındaki alan $y = e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

Rastgele seçilen iki tamsayının ortak bir asal çarpanları olmaması olasılığı $6/\pi^2$. Bir çok kuvantum denkleminde π ve Planck sabiti (h) birlikte bulunur

Ev İşleri

Deli Ruhiye'nin bir ruh doktoruyla evlendiğini söylemiştik. Yeni evliler ev işlerini aralarında böldüler. Fakat Ruhiye bu listeyi kabul etmedi; en ağır işlerin kendisine verildiğini iddia ediyordu. Ruhiye'nin yaptığı listeyi de eşi beğenmedi. Kavga etmeye başladılar. O sırada Cin Ruhi çıkageldi. Öyle bir şey söyledi ki kavga hemen durdu. Acaba Ruhi ne demişti?

Boadicea

Boadicea, Cleopatra doğduktan 129 yıl sonra öldü. İkisinin yaşlarının toplamı 100 idi. Cleopatra M.Ö. 30'da öldü. Boadicea ne zaman doğmuştu?

Sayıları Gruplara Ayırmak

Pozitif sayılardan 3 küme yapalım; herhangi iki kümeden alınacak birer elemanın toplamı üçüncü kümede bulunabilir mi? (Kümeler boş değil ve her kümenin elemanları diğer kümelerden farklı)

Küre

Bir kürenin üzerinde rastgele 3 nokta alalım. Bu 3 noktanın aynı yarım küre üzerinde bulunma olasılığı nedir? Bir yarım kürenin sınırındaki daire, o yarımküreden sayılır.

Bütünün Parçalara Ayrılması

Şekilde 5 cismi 7 türlü parçalayabildiğimiz görülüyor.

5'i bir arada, 4+1,3+2,3+1+1,2+2+1,2+1+1+1 ve 1+1+1+1+1. Bunu şöyle ifade ederiz: p(5)=7. p(6) ve p(7)'yi hesaplayınız. Peki p (200) kaçtır dersiniz? p(200)=3 972 999 029 388. n çok büyük olunca kullanılabilecek kesin bir formül yoktur. 2 Ocak 1917'de Ramanujan ve Hardy Paris Bilimler Akademisine şu asemptotik formülü sundular:

$$p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$

Rademacher bundan çok kesin, fakat çok karmaşık bir formül elde etti. Terimlerin sırası dikkate alınırsa iş çok kolaylaşır; örneğin n=5 için 3+1+1 ve 1+3+1 farklı kabul edilirse iş basitleşir. Sıra dikkate alınarak n obje kaç türlü parçalanabilir?

Küpe Problemi

Bir Afrika köyünde 800 kadın var. Kadınların %3'ü tek küpeli. kalan %97'nin yarısı çift küpe takıyor, yarısı küpe takmıyor. Toplam kaç küpe var?

Dört Yüzlü

Düzgün bir dörtyüzlüde dört yüzlünün merkezi ve herhangi iki köşesi aynı düzlemdedir. Düzensiz dörtyüzlüler için de bu ifade geçerli midir?

Tenis Turnuvası

Bu yıl tenis turnuvasına 82 oyuncu girdi. Şampiyonu belirlemek için kaç maç gerekli?

Satranç Şampiyonası

Dünya satranç şampiyonu Gasparov bilgisayarla satranç oynuyor. Gasparov'un 5 maçtan 3'ünü kazanma şansı, 5 maçtan 4'ünü kazanma şansanı eşitse, Gasparov'un 5 maçın 5'ini de kazanma olasılığı nedir?

Geçen Ayın Çözümleri

Ahtapotlu Bilmece

Aslında çok kolay. A'dan kırmızı noktaya varmak üzere yürüdüğünüzü varsayalım. Telörgülerden kaç kere geçtiğinizi sayarsınız. Çift sayıda telörgü geçmişseniz kırmızı nokta telörgü dışındadır; tek sayıda telörgü geçmişseniz kırmızı nokta telörgü içindedir. A'dan üst kırmızı noktaya varmak için telörgüden iki kez geçmelisiniz; 2 çifttir; o halde üst kırmızı nokta telörgü dışıdır. A'dan alt kırmızı noktaya varmak için tek bir telörgü geçmelisiniz; 1 tektir; o halde alt kırmızı nokta telörgü içidir.

Mefisto Düğümü

Sağdaki düğümde ipin uçlarından çekerseniz düğüm, son derece güven verici olmasına rağmen, derhal çözülür. Hayat ta Mefisto düğümleriyle dolu. Çok güvenilir gözüken birçok şeyin içi kof çıkmıyor mu? (sihirbazlıkta bu düğümün adı (Chefolo düğümüdür).

Ampul İçindeki Basınç

Ampulü suya daldırıp su düzeyinin h_1 yükselişini kaydedin. Sonra ampulü suyun içinde altındaki madeni kısımdan ayrılacak şekilde kırın. Ampul içine su dolacak ve su düzeyi düşecek, fakat başlangıç haline göre h_2 yüksekliğinde olacaktır. Ampulün hacmi $V_1 = S.h_1$ (S kabın kesiti cm^2 olarak). Ampul kırılınca ampul içi basınç atmosfer basıncına eşit olur; ampul içi gaz hacmi $V_2 = S.h_2$ dir. Boyle yasasınca $p.S.h_1 = p_o.S.h_2$

ve $p = p_0 \frac{h_2}{h_1} = 1$ atmosfer.

Gezegenin Yoğunluğu

Uzay gemisi yıldız tarafından

$F_{gr} = G\frac{Mm}{R^2}$ kütlleçekim kuvvetiyle çekilmektedir.

G=yerçekim sabiti, M = yıldızın kütlesi, m= geminin kütlesi ve R yıldızın merkezinden olan uzaklık (yaklaşık olarak yıldızın yarıçapı).

$$M = VD = \frac{4}{3}\pi R^3 D$$ ve

$$F_{gr} = \frac{4}{3}\pi GRmD.$$

Uzay gemisini dışarı fırlatan santrifüj kuvveti

$$F_{sf} = \frac{mV^2}{R} = mw^2R = m\frac{4\pi^2}{T^2}R.$$

V= doğrusal hız, W=açısal hız, T=periyod. $F_{gr} = F_{sf}$'den $D = 3\pi/GT^2$. Saatle T bulunarak D hesaplanabilir.

Venüs Dönüyor mu?

Bu bir sarkaçla kanıtlanabilir. 1881'de Fransız fizikçisi Jean B.L. Foucault Paris'de Panteon binasının kubbesine 67 m uzunlukta bir sarkaç bağlayarak Dünya'nın kendi etrafında döndüğünü kanıtladı. (Dünyanın en uzun sarkacı St Petersburg'da St.Isaac katedralindedir: 98 m). Sarkaç tavana üniversel eklemle bağlanmıştı; bu eklem yatay bir eksen etrafında salınan bir sarkacın düşey düzlemde dönmesini sağlar. Yerdeki sabit işaretlere göre sarkacın salınım düzlemi döner. Bu deney Ekvator'da yapılamaz, orada sarkaç düzlemi dönmez. Kutuplardaysa sarkaç düzlemi Dünya'nın açısal hızıyla döner. Fakat ters yönde.

Paraları Tartmak

Paraları olabildiğince eşit 3 grupa ayırarak (A,B,C) A ile B'yi kefelere koyarız. 3 olasılık vardır: 1) A ağır basar. Ağır para buradadır. 2) B ağır basar; ağır para buradadır. 3) A=B ise ağır para C'dedir. Bir tartış 3 olasılık, 2 tartış 3^2 = 9 olasılık, 3 tartış 3^3 =27 olasılık, m tartış 3^m olasılık arasında karar verdirir. Tersinden alırsak 3^m para varsa: Birinci tartışta 3 grup 3^{m-l} para ayrılır.

İkinci tartışta üç grup 3^{m-2} para ayrılır. vb. m. ve son tartışta her kefede 1 para kalır.

Örneğin 3^3= 27 para varsa I. tartışta ağırı içeren 9 para, 2. tartışta ağırı içeren 3 para ve 3. tartışta ağır para bulunur. (hafif para için aynı mantık.)

Örneğin 21 para varsa I. tartışta herbiri 7 paralık üç grup kıyaslanır. 2. tartışta ağır para içeren 7'li grup 3+3+1 olarak ayrılır ve kefelere 3,3 konulur. Denge varsa ağır olan kalan tek paradır; bir kefe inerse o kefedeki 3 para 3. tartışta kıyaslanır; kefelerin herbirine I para konulur; bir kefe ağır basarsa o para ağırdır; denge varsa tek kalan para ağırdır.

8 Para, Biri Farklı

Yapılan tartı	1 2 3 4 \ 5 6 7 8							
1. tartı	1 2 5 - 3 4 6							
1. tartı sonuçları	\			|		/		
2. tartı	1-2			7-8		3-4		
2. tartı sonuçları	\	|	/	\	/	\	|	/
Aranan para	1	6	2	8	7	3	5	4
Paranın karakteri	A	H	A	H	H	A	H	A

Paralara numara verelim: l,2,3...,8. Bir kefeye l,2,3 diğerine 4,5,6 konur. Bu şöyle gösterilir: l 2 3-4 5 6. Şu işaretleri hatırda tutalım: \ sol kefe aşağıda (çizginin ucu solda), l=kefeler dengede, / = sağ kefe aşağıda. (çizginin ucu sağda). N= normal, A= Ağır, H= Hafif.

Başlangıç: l 2 3 4 \ 5 6 7 8

I. tartı l 2 5 - 3 4 6

Eğer l 2 5 \ 3 4 6 ise l veya 2 veya 5= A ve 3 veya 4 veya 6 = H. Fakat başlangıç durumuna göre iki olasılık vardır: a) l veya 2=A; b) 6=H (Başlangıçta 3 ve 4 ağır, 6 ise hafif taraftaydı). İkinci tartıda l ve 2 kıyaslanır; sonuç \ ise 1=A, sonuç / ise 2=A ve sonuç l ise 6=H'dır. l 2 5 / 3 4 6 ise 3 ve 4 kıyaslanır. İkinci tartı \ ise 3=A, / ise 4=A ve l ise 5=H olduğu belirlenir. l 2 5 l 3 4 6 ise 8 ile 7 kıyaslanır. \ ise 8=H ve / ise 7=H'dır. (Burada l olasılığı olamaz tabii ki).

Aşağadaki tablo durumu özetliyor.

9 Para Biri Farklı

1.tartı	\						|					/					
2. tartı	\		|		/		\		|		/		\		|		/	
3. tartı	1-2		1-3		1-4		1-7		1-9		1-8		1-4		1-3		1-2	
Aranan Para	1	5	6	3	4	2	8	7	[illegible]	9	7	8	2	4	3	6	5	1
Paranın karakteri	A	H	H	A	H	A	H	A	H	A	H	A	H	A	H	A	A	H

80 Para Biri Farklı

Birinci (sol) kefedeki paraları 3 gruba ayıralım: a=l4 para, b=l4 para ve c=l2 para. İkinci (sağ) kefedeki paraları 3 gruba ayıralım: d=l3 para, e=l3 para ve f=l4 para. abc-def tartısında sol ağır bassın. 1. tartı: a ve d ile (solda 27 para) b ve e (sağda 27 para) kıyaslanır. Sol aşağı inerse ya farklı para a'dadır ve ağırdır veya b'dedir ve hafiftir. Denge varsa ya farklı para c'dedir ve ağırdır veya f'dedir ve hafiftir. Sağ aşağı inerse ya farklı para b'dedir ve ağırdır veya d'dedir ve hafiftir. Bu 3 olgu benzerdir. İlkini ele alalım. a'yı 3'e ayıralım: g=5 para, h=5 para i=4 para; e'yi de 3'e ayıralım: j= 4 para, k=4 para ve m=5 para. a=g+h+i ve e=j+k+m.

2. tartı: gk ile (9 para) jh (9 para) kıyaslanır. Sol aşağı inerse farklı para g'de ve ağır veya j'de ve hafiftir.Şimdi g üçe ayrılır: n=2, p=2, q=l;j de üçe ayrılır: r=1, s=1,t=2. g=n+p+q, j=r+s+t

3. tartı: nr ile ps kıyaslanır. Sağ taraf inerse ya p farklı ve ağırdır ya da r farklı ve hafiftir (r tek para).

4.tartı: p'nin iki parası kıyaslanır. Hangi kefe aşağı inerse o para ağırdır.

Yıldızın Kütlesi

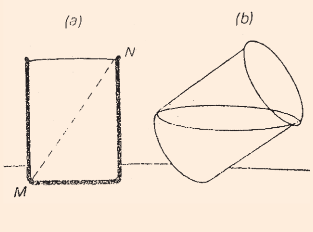
El kantarıyla yıldızın l kg'a uyguladığı kütle çekimi (p) bulup şu formülü kullanırız.

$$P = G\frac{Mm}{R^2}$$ ve

$$M = \frac{PR^2}{Gm}$$

G= Gravitasyon sabiti, M= yıldızın kütlesi, P= deneyle bulunan değer. M ve R verilmiş.

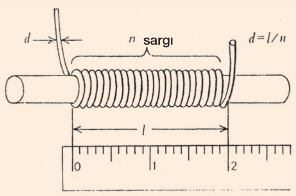
Bardakta Sihirbazlık



3 Şapka Problemi

Ruhi'nin başında mavi şapka olsaydı, Peri Perihan şöyle düşünecekti: "Şeyda elini kaldırdığına göre bir kırmızı şapka görüyor. Ortada 3 şapka var. Şeyda kendi başını göremez. 2. şapka mavi; o halde Şeyda benim kafamdaki kırmızı şapkayı görüyor". Bu usavurmayı yaptıktan sonra, Perihan hemen "benim şapkam kırmızı" diyecekti. Şeytan Şeyda da aynı mantığı kullanacaktı. Ama her ikisinden de ses çıkmadı. O zaman Ruhi kendi şapkasının mavi değil kırmızı olduğunu anlayıverdi. Diğerleri de aynı mantığı kullanarak "benim başımdaki kırmızı" diyebilirlerdi. Demek ki içlerinde en hızlı düşenen Ruhi imiş.

Telin Çapı



Teli sımsıkı kalemin üzerine sararsınız ve kalem üzerinde L'yi ölçersiniz. n bellidir. d= L/n'dir. Bir bölmenin hatası pay ve payın rölatif hatalarının toplamıdır. L %l duyarlıkla ölçülür. n'i saymadaki hata %2'dir. (sargı 49 mu, 50 mi bazen karar verilemez). Toplam hata % l+%2=%3'dür. Telin çapı d=0.l mm ise bu 0.00 3 mm'lik bir hatadır ki kabul edilebilir.

Genişletilmiş Şapka Problemi

a,b,c: "Diyelim ki benim şapkam mavi. Diğer üçü karşılarında bir mavi, iki kırmızı görecek ve kendi şapkasının rengini düşünecek. Fakat bu, bundan önceki probleme geri dönmektir. Sonunda bu 3 kişiden biri mutlaka usavurmayla kendi şapkasının kırmızı olduğunu anlayacaktır. Fakat yeterli zaman geçti ve kimse "benimki kırmızı" demedi; o halde benim başımda kırmızı var. n kırmızı şapkalı kişi için aynı kural. Böylece matematik tümevarımla anlaşılır ki durum önce (n-l). evreye, sonra geri giderek (n-2), evreye ve sonunda 3. evreye girer. 3 kişilik problemin çözümünü yukarıda gördük. Aslında n kişinin beyni eşit hızla çalışsaydı hepsinin aynı zamanda "benim şapkam kırmızı" demesi gerekirdi. Demek ki beyinlerinin kuvvetine göre sırayla l,2,3...,n. kişi kendi başındaki şapkanın rengini bilecektir. Bu yöntemle n insan hızlı ve doğru düşünme bakımından sıraya konulabilir.

d şıkkı: En arkadaki adam şapkasının rengini bilemez; bir önündeki de bilmiyorum der. En baştaki şöyle düşünür: En arkadakinin önünde iki siyah olsaydı o "benimki beyaz" derdi. Bunu demediğine göre önünde iki siyah şapka yoktur. Diyelim ki benim şapkam siyah; o zaman ortadaki, en sondakinin bilememesinden, kendi şapkasının beyazlığına emin olurdu ve " benim ki beyaz" derdi. Ama demedi. O halde varsayım yanlış; benim şapkam siyah değil beyaz. Bu arka arkaya 3 adama önden arkaya şu sıfatlar verilmiştir: l kör; 2 yarı kör; 3 Normal görüş.

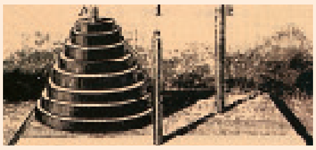
Hipopotamın Ağırlığı

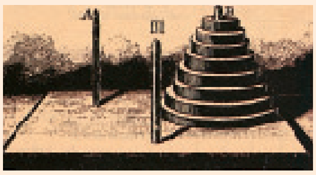
Bakıcı hipopotamı mavnaya koyup mavnanın ne kadar suya battığını işaretledi; sonra hipopotamı çıkarıp aynı çizgiye gelene kadar mavnaya altın doldurttu. Bu durumda hipopotamın ve altınların ağırlığı eşittir.

İki Renkli Hanoi Kulesi

29 hamle gereklidir.

A-C, B-C, A-B,
C-B, C-B, A-C,
B-A, B-A, B-C,
B-C, A-C, A-C,
B-A, C-A, C-A,
C-B, C-B, A-C,
A-C, B-A, B-A,
C-A, C-A, C-B,
A-C, A-C, A-B,
C-B, C-A.





Hatırlatmak için orijinal Hanoi Kulesini veriyoruz. Aynı kurallarla A'daki diskler B'ye geçirilecek. Gerekli hamle sayısı, n disk varsa, 2^n-l'dir. Bu bilmeceyi Fransız Matematikçisi Edourd Lucas'ya l842-1891) borçluyuz. O matematiksel eğlencelerin uzmanıydı. Kitapları: Sayılar Teorisi, Eğlendirici Aritmetik, Matematik Eğlenceleri (4 cilt.)

Eşitsizlik

$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$, Bir kare daima pozitiftir; o halde $x^2 + y^2 > 2xy$.

Kare İçi Üçgenler

Bu 9 nokta arasından bir A noktası seçelim. İki nokta A ile doğrudaşsa alanı 0 olan bir üçgen oluşur ve problem çözülmüş olur. Hiçbir nokta çiftinin doğrudaş olmadığını düşünelim. Diğer noktalara B,C,D,E,... diyelim. bu noktalar A ortada olarak sıralansın. ABC, ACD, ADE,... üçgenlerini oluşturalım. Böyle 8 üçgen vardır. Karenin alanı 1 olduğundan üçgenlerin toplam alanı 1'i geçemez. O halde üçgenlerden birinin alanı 1/8'den küçük olmalıdır.

Dayı=Yeğen

DAYI=YEĞEN: Dedecan'ın Güzelcan adlı bir kızı vardı. Efecan'ın kızı ise Hızlıcan'dı. Dedecan Hızlıcan'la evlendi ve Kafacan doğdu. Efecan ile Güzelcan evlenince de Babacan doğdu. Kafacan Dedecan'ın oğlu olduğundan Güzelcan'ın kardeşidir. Babacan'ın annesi Güzelcan olduğundan Kafacan Babacan'ın dayısıdır. Diğer taraftan Hızlıcan ile Babacan kardeştir ve Kafacan Hızlıcan'ın oğlu olduğundan Babacan Kafacan'ın dayısıdır, yani Kafacan Babacan'ın yeğenidir. Böylece Kafacan ile Babacan birbirlerinin hem dayısı, hem yeğenidir.

Üç Karenin Toplamı

Çift sayıların karesi 8 ile bölününce kalan 0 veya 4'dür. Tek sayıların karesi 8 ile bölününce kalan daima 1'dir. Üç karenin toplamı 8 ile bölünürse kalan 0,1 ve 4'ün tekrarlı ve 7'ye varmayan toplamıdır; Örneğin 0,1, 1+1,1+1+1,4,4+1,4+1+1. 7 olamaz. O halde 7,15,23,31,.... üç kare toplamı olamaz. Bir diğer deyişle 8n-1 şeklindeki sayılar üç kare toplamı olamaz.

5 Kuralı

Basamaklarının toplam 5 olan bir sayı 9k+5 şeklindedir. (14,23,32,41 vb) Böyle bir sayı 3 ile bölününce kalan olarak 2 verir. Oysa bütün kare sayılar 5 ile bölününce kalan olarak 0 ya da 1 verir.

Mantık Olmasa Yandık

Bu 17 sayının birbirlerine eşit olmadığını varsayalım. $a_1 > a_2$ olsun; ($a_1 < a_2$ de benzer sonuç verir). Şimdi şu mantığı yürütelim: $a_1^{a2} = a_2^{a3}$ ve $a_1 > a_2$ Bu eşitliğin sağlanabilmesi için $a_3 > a_2$ olmalıdır.

(Bir örnekle görelim: $9^2=2^x$ (9>2). 2'nin kaçıncı kuvveti 81'e eşittir? Belli ki 2'nin üssü 2'den büyük olmalıdır.) Demek ki:

$a_1 > a_2$ Ş $a_2 < a_3$ Ş $a_3 > a_4$ Ş... Ş $a_{16} < a_{17}$ Ş $a_{17} > a_1$ Ş $a_1 < a_2$ (Ş ise demektir)

Birinci ve sonuncu eşitsizlik birbiriyle çelişiyor. Bu çelişki terimlerin eşit olmadığını varsaydığımızdan doğdu. O halde $a_1=a_2=...= a_{17}$ Not: Terim sayısı 17 gibi tek bir sayı değil çift bir sayı, örneğin 18 olsaydı, bu ispat yapılamazdı.

N Ardışık Tek Sayı

$N^a = N \cdot N^{a-1}$. Bu ise N^a'nın, ortalaması N^{a-1} olan N terimin toplamına eşit olması demektir. N ardışık tek sayı N^{a-1}- N+1 tek sayısından başlayarak sıralanmışlardır.

Örnek: 5^3=125.N=5 ve a=3.

$N^{a-1}=5^2=25$ ve N^{a-1}-N+1=25-5+1=21 ve 21+23+25+27+29= 125

1996 Doğal Sayı

1,2,....,1996 sayılarını şöyle çift çift yazdım: (1;1996), 2;1995)....(998;999).Bu çiftlerin herbirinin toplamı 1997'dir. Bu çiftlerden en azından n tanesinde, çifte ait her iki sayı da seçtiğimiz 998+n sayı arasındadır ve bu n çiftin toplamı 1997 n'dir. Tabii ki n çiftde 2n sayı vardır.

Gerekli ve Yeterli

G= gerekli, Y= yeterli

1) G, 2)Y 3)G, 4)Y, 5)G, 6)Y.

Açıklama:1) Yeterli değil; çünkü 4'e bölünen bazı sayılar 8'e bölünmez; örneğin 20, ama 8'e bölünen her sayı 4'e de bölünür.

2) Yeterli; çünkü 8'e bölünen her sayı 4'e de bölünür

3) Her eşkenar üçgen daraçılıdır; ama her daraçılı üçgen eşkenar değildir.

4) a<2 ve b<15 ise kesinlikle a+b<17'dir.

5) Yeterli değil; çünkü a veya b'den yalnız biri 0 ise de ab=0 olur.

6) $3^3.3=3^4$ olduğundan $s.p>3^4$ olur.

İki Kare Toplamı

Fermat kuralı: 4'ün tam sayı katlarından 1 fazla olan her sayı iki kare toplamıdır. 4'ün tam sayı katlarından 1 eksik olan hiçbir sayı iki kare toplamı değildir. Herbiri iki kare toplamı olan iki sayıyı birbirleriyle çarparsak yine iki kare toplamı olan bir sayı elde ederiz:

$(a^2+b^2)\ (c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad - bc)^2=(ac-bd)^2+(ad + bc)^2$.

Örnek $17^2=(1^2+4^2)(1^2+4^2) =$
$[(1x1)+(4x4))]^2 + [(1x4) - (4x1)]^2=$
$[(1x1) - (4x4)]^2 + [(1x4) + (4+1)^2$

İlki $17^2=17^2$ verdi. ikinci eşitlik $17^2=15^2+8^2$ verdi. İkinci eşitliği alıyor ve Pisagor üçlülerini buluyoruz.

Formüle vuralım:

$Z^2=m^2+n^2=m+n$ olsun.

$Z^2=(m^2+n^2)\ (m^2+n^2)=(m^2+n^2)^2+(mn+mn)^2$

ve $(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$

$c = m^2 + n^2$, $b = m^2-n^2$, $a = 2mn$

formülü buradan geliyor.

Yalın Mantık

$a_1 \geq s/n$ ise diğer bütün sayılar s/n 'den büyüktür, çünkü a_1 en küçük sayıdır. Fakat n sayının herbiri s/n'den büyükse toplam s'den büyük olur; bu çelişkidir; $a_1 \leq s/n$ olmak zorundadır. (Örneğin $5 \leq 8 \leq 9 \leq 13 \leq 20$ alalım. Toplamları 55. 55/5 = 11. 1. terim ≤ 11 olsaydı diğerleri de ≤ 11 olacaktı; fakat 11.5 = 55 olduğundan toplam 55'i geçerdi). $a_n \leq s/n$ olsaydı bütün diğer sayılar s/n'den küçük olurdu; o zaman toplam s/n'den küçük kalırdı.

$a_1 \leq s/n$ ve $a_n \geq s/n$ olmak zorundadır.

"Kolay" Bir Toplam

$10^{100} + 20^{100} + 30^{100} + ...$ son üç rakama etki yapmayacağından onları toplamdan atalım.

$S_o = [1^{100}+2^{100}+...+9^{100}]+[11^{100}+12^{100}+ ...+ 19^{100}]+ ...$
$[999991^{100}+999992^{100}+...+999999^{100}]$.

Bu parentezlerin herbiri 1000 mod'una göre $1^{100}+2^{100}+...+9^{100}$ sayısına kongrüenttir. Çünkü her n doğal sayısı için : $(10n+1)^{100} \equiv 1^{100}$ (mod 1000), $(10n+2)^{100} \equiv 2^{100}$ (mod 1000), ... , $(10n+9)^{100} \equiv 9^{100}$(mod 1000). Parantez sayısı (999999+1)/10=100 000 dir. O halde:

$S_o=(1^{100}+2^{100}+...+9^{100}).100\ 000$ (mod 1000)≡0 (mod 1000) olur.

Bu nedenle aranan toplam 000 ile biter (1000 ile kalansız bölünüyor).