

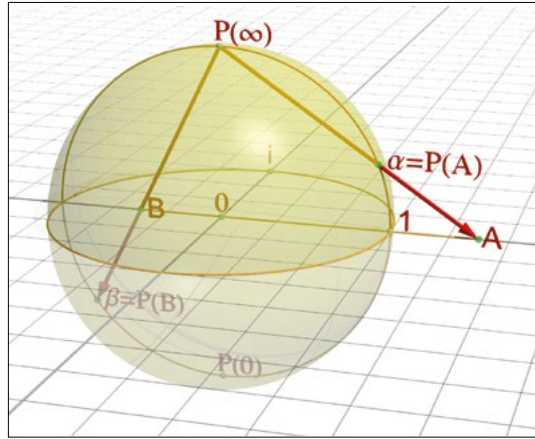


BERNHARD RIEMANN

*VE*

# KÜTLEÇEKİM DALGALARI

Bir milyar üç yüz milyon yıl önce iki kocaman kara delik çarpıştı ve bunların kütleçekim dalgaları Dünya'ya doğru yol almaya başladı. Bu dalgalar eğer hemen Dünya'ya ulaşmış olsalardı fotosentez yaparak yaşayan bakterilerden başka hiçbir şey bulamayacaklardı. Oysa 2016 yılında Dünya'dan geçerken kendilerini bekleyen ve onları ölçmek için gerekli bilgi ve teknolojiyi geliştirmiş akıllı varlıklarla karşılaştılar. Bu akıllı varlıklar o dalgaları bekliyordu, çünkü yüz yıl önce, yirmi altı yaşında bir genç adam bu çeşit dalgaların bir ara Dünya'ya uğraması gerektiğini söylemişti. Bu genç adam uzayın zaman parametresiyle beraber düşünüldüğünde eğimli bir yapı sergileyeceğini öne sürmüştü ve iddialarını kendinden altmış bir yıl önce yirmi sekiz yaşında bir başka gencin sunduğu bir geometri tezindeki kavramlara dayandırıyordu. Oysa o tez, o sıralar yetmiş yedi yaşında olan huysuz tez hocasının aksiliği tutmasa hiç yazılmayacaktı.



## Riemann ve Matematik

Bernhard Riemann 1826 yılında bir din adamının altı çocuğundan biri olarak hayata başladı. On yaşına kadar babası onun eğitimiyle kendi ilgilendi. Liseye başladığında matematiğe olan yatkınlığı hocalarını şaşırtıyordu. Hatta bir ara bir hocasının kendisine ödünç verdiği, Legendre'in dokuz yüz sayfalık sayılar kuramı kitabını bir haftada okudu. Ama babası gibi din adamı olmak istiyordu. Yirmi yaşında ilahiyat okumak için Göttingen Üniversitesi'ne kaydoldu. İnsanlık nefesini tutarak bu gencin seçmeli bir ders alıp Gauss'tan matematik dinlemesinin sonucunu bekledi. Genç Riemann babasına bir mektup yazarak izni olursa ilahiyat bölümünü bırakıp matematik bölümüne geçmek istediğini söyledi. İşte insanlık tarihinin değiştiği anlardan biri baba Riemann'ın oğlunun bu isteğine onay verdiği andır.

Riemann'ın hocası Gauss da gençliğinde üniversiteye başladığında edebiyat mı okusun matematik mi, uzun süre karar verememişti. Bir sabah kalkıp bugün bir on yedi kenarlı çokgenin sadece cetvel ve pergel kullanılarak nasıl çizileceğini defterine yazınca matematikçi olmakta karar kılmişti. İki bin yıldır çözülemeyen bir problemi çözerek başlanacak bir meslekte daha başarılı olacağını kestirmişti herhalde. Nitekim tüm zamanların tartışmasız en büyük ve tartışmalı en huysuz matematikçisi olarak adını tarihe yazdırdı. İşte Riemann bu adamın yanında matematik öğrenmeye başladı.

## Riemann'ın Doktora Tezi

Daha sonra Humboldt Üniversitesi adını alacak olan Berlin Üniversitesi o sıralar çok sayıda matematik yıldızını barındırıyordu. Genç Riemann, artık yaşlandığı için yoğun olarak ders veremeyen hocasını bırakıp iki sene Berlin'de çalıştı. Döndükten sonra Gauss'un yanında doktora tezini hazırladı. Yirmi beş yaşında sunduğu tezi bugün hâlâ karmaşık analizin başyapıtı olarak bilinir. Konuya çağdaşlarından çok farklı, algoritmik değil kavramsal olarak yaklaşmış ve bugün hem matematikte hem de fizikte önemli bir yer tutan Riemann yüzeyleri kavramını ortaya atmıştır.

Matematikteki "her önemli eserde mutlaka bir hata vardır" kuralının bir uzantısı olarak Riemann'ın doktora tezinde de matematikçileri en az elli yıl uğraştıracak bir hata vardı. Bugün Riemann Açık Gösterim Teoremi olarak bilinen bu teorem düzlem üzerinde karmaşık analiz yapmaya değer ve düzlemin kendisinden küçük yegâne bölgenin birim daire olduğunu söyler. Başka uygun bölgeler varsa da onların birim daireyle özdeş olacağını kanıtlar. Daha sonra Weierstrass bu kanıtta bazı sorunlar olduğunu gösterir. Riemann "kanıtım sorunlu olabilir ama teoremim doğru" der. Bundan sonra yıllarca matematikçiler Riemann'ın kanıtını kurtarmaya çalıştı. Bugün aynı teoremin Riemann'ın kullanmadığı yöntemlerle yapılan ve herkesin kabul ettiği kanıtları var. Teorem sonuç olarak Riemann'ın dediği gibi doğrudur.



Carl Friedrich Gauss

## Hocalığa İlk Adım

Doktora teziyle bu kadar olay yaratan adamın bir sonraki tezi elbette merakla bekleniyordu. Üniversitede ders verme yetkisi almak için yazmak zorunda olduğu tezini 1854 yılında yazdı. Zamanın moda problemlerinden birini ele alıp kimsenin öngörmediği düzeye çıkarıp çözdü. Fonksiyonların trigonometrik fonksiyonlar yardımıyla temsili üzerine yazılan bu tezde de bugün üniversitelerin birinci sınıflarında anlattığımız Riemann integrali kavramını ortaya attı.

Şimdi bir de uygulamalı bir ders verip hocalık yapmaya yetkin olduğunu göstermesi gerekiyordu. Artık bu safha rutin bir süreç içeriyordu. Genç aday ne kadar çok şey bildiğini göstermek için birbirinden farklı üç konu önerecek, hocası da birinci sırada önerilen konuyu seçecek ve aday da sunumunu yapıp hocalık hakkına kavuşacak. Riemann birinci konu olarak yazılı tezinin konusunun tarihini sunmayı önerdi. Hemen hemen hiç ön hazırlık yapmadan bu konuyu anlatacağı ve hoca olacağı beklentisindeydi. İkinci konu olarak “bakın ben cebir de biliyorum” demek için bazı denklem çözümleriyle ilgili bir sunum önerdi. Hiç seçilme şansı olmayan üçüncü konu olarak da “Geometrinin Temelinde Yatan Önermeler” başlıklı, nereye varacağı belirsiz ama geometri de bildiğini ima edecek bir konu önerdi.

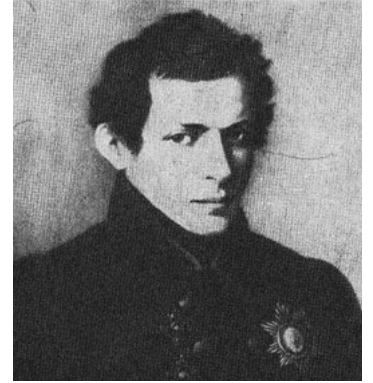
Hocası Gauss uzaydaki yüzeylerin nasıl eğilip büküldüğü üzerine gençliğinde çalışmış, hatta “Muhteşem Teorem” adını verdiği muhteşem bir teorem de ispatlamıştı. Evet, Gauss teoreminin muhteşemliğini başkalarından önce gördüğü gibi teoremine “muhteşem” demekten çekinmeyecek kadar burnu büyük bir adamdı, gençliğinde bile! Yaşlılığında da bölüm koridorlarında öğrencileriyle sohbet ederken zaman zaman bu teoremine atıfta bulunup bunun daha yüksek boyutlara genellemesini yapmak için yüksek boyutlu uzaylarda bir mesafe kavramına gerek olacağı yönünde tahminlerde bulunuyor, ama böyle bir mesafe kavramının nasıl uydurulacağı konusunda hiçbir fikri olmadığından dem vuruyordu. Genç Riemann herhalde hocasına şirin görünmek için “bak ben senin her sözünü nasıl hatırlıyorum” demeye getirip bu üçüncü sunum konusunu önermiştir. Nasıl olsa seçilmeyecek bir konu.

## Her İşte Bir Hayır Vardır

Gauss huysuzluğu, geçimsizliği ve kendini beğenmişliğiyle gençleri matematikten soğutmasıyla bilinir. Pek çok genç matematikçi yaptığı önemli bir çalışmayı Gauss’a getirip gösterdiğinde “ben bunu yıllar önce yapmıştım, ama kimseye göstermeye değer bulmamıştım” cevabını alıp yıkılmıştır. Bu yetmezmiş gibi Gauss bir de çekmecesini açıp, tozlanmış bir demet kâğıt çıkarıp gencin önüne atar ve o kâğıtlarda gerçekten o gencin bulduğu sonucun ya aynısı ya da daha iyisi vardır. Öklid dışı geometrilerin arandığı yıllarda genç Lobachevsky’nin babası oğlunun böyle bir geometri bulduğunu bir mektupla Gauss’a bildirir. Gauss, her zaman olduğu gibi, bu çeşit geometrileri kendisinin de gençliğinde bulduğunu ama herkese gösterip şan şöhret elde etme peşinde olmadığı için çekmecesinde tuttuğunu yazar. Genç Lobachevsky’nin matematiğe olan merakını kibarca över ve kendince destekler. Lobachevsky’nin bir daha elini bir matematik problemine sürmediğini söylemeye gerek yok herhalde.

Riemann’ın hocalık tezindeki fikirleri samimi olarak beğenen ve bu konudaki raporunu çok cömert övgü sözleriyle dolduran Gauss, raporunu “Sunum için üçüncü konuyu seçiyorum ve sınavı belirtilen tarihte yapacağım” diye bitirir.

İşte 2016 yılında karadeliklerin kütleçekim dalgalarını ölçtüsek bunu Gauss’un bu aksiliğine borçluyuz.



Nikolay Ivanovich Lobachevsky

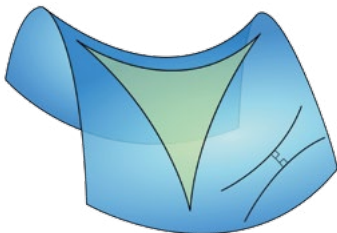
## Geometrinin Temeli

Riemann bu beklenmedik seçim karşısında matematiğe küser. Evine kapanır. Haftalarca okula gitmez. Sonunda çaresiz okula döner ve uydurduğu bu başlığın içini doldurmak için çalışır. Sunum zamanı da yaklaşmaktadır. 10 Haziran 1854 tarihinde yirmi sekiz yaşındaki bu genç, Gauss başkanlığında toplanmış sınav jürisi önünde geometrinin temellerinde yatan önermeleri anlatmaya başlar. Gauss dışında, dinleyiciler arasında hiç kimse insanlık tarihinin dönüm noktalarından birinin yazılışına tanıklık ettiklerini fark etmez bile. Oysa Riemann, adayın nasıl ders işlediğine bakıp not verileceği için matematik bölümü dışından da üyelerin olduğu jüri sunumdan kopmasın diye konuyu hemen hemen hiç denklem kullanmadan anlatmaktadır.

Kimseye iltifat ettiği pek duyulmayan Gauss'un bu sunumdan sonra hararetle Riemann'ın fikirlerini övmesi elbette hayra alamet değildi. Belki de misyonunu bitirdiğini anlamıştı ve yerine gönderilen kişiyi tanımıştı. Nitekim ertesi yıl yetmiş sekiz yaşında öldü.

## Riemann Geometrisi

Riemann'ın hemen hemen hiç denklem kullanmadan anlattığı konu, çok boyutlu bir uzayda etrafınıza baktığınızda gördüklerinizle uzayı ne kadar ve ne şekilde tanıyacağınızla ilgiliydi. Bazı özelliklerin ölçülerek bulunacağını, bazı özelliklerin de bu ölçümler kullanılarak hesaplanacağını anlatıyordu. Gauss da gençliğinde Almanya'daki dağların tepelerine çıkıp başka dağ tepeleriyle oluşan üçgenlerin iç açılarını ölçüp Dünya'nın eğimini hesaplamaya çalışmıştı. Elindeki aletlerin yeteri kadar hassas olmaması nedeniyle beklediği gibi bir sonuç alamamıştı. Riemann bu ölçümlerin kavramsal olarak yüksek boyutlarda nasıl yapılacağını anlatıyordu sunumunda. Bu sunum ölümünden sonra basıldığında onun sözel tarifleri kullanılarak yeni bir geometri konusu ortaya kondu: Riemann geometrisi. Bugün bu konuda yazılmış herhangi bir kitabı alıp rastgele bir sayfa açarsanız bir semboller ve denklemler senfonisiyle karşılaşsınız. Böyle bir konuyu o çocuk nasıl denklem kullanmadan anlatmış, şaşar kalırsınız.



## Albert Einstein

İşte 1915 yılında yirmi beş yaşında bir gencin, Albert Einstein'ın, uzayın eğilip büküleceğini ve buna dayanarak yapılacak hesapların fizik olgularını daha hassas modelleyeceğini öne sürerken kullandığı matematik model Riemann'ın ortaya attığı Riemann geometrisiydi. Hani şu yaşlı hocanın huysuzluğu sonucu seçtiği konu.



Albert Einstein

## Dünyanın Hali

Riemann bu sunumu yaptığı sırada Avrupa devletleri Ruslarla savaştaydı. Osmanlı tarihinde Kırım Savaşı olarak bilinen bu savaşta Riemann'ın sunum yaptığı günlerde Silistre savunması yapılıyordu. Birkaç ay sonra, bu savaşın mali giderlerine daha fazla dayanamayan Osmanlı, Baltalimanı Antlaşmasıyla tarihinde ilk kez dış borç alacaktı. O zaman padişah Abdülmecit'ti ve dönemin en önemli Türk matematikçisi Salih Zeki'nin doğumuna daha on yıl vardı.

## Riemann'a Durmak Yok

Daha yirmi sekiz yaşındayken Riemann yüzeyleri, Riemann integrali ve Riemann geometrisi gibi kavramları matematik literatürüne sokan bir adamın artık rahat oturmasını ve elde ettiği prestijin tadını çıkarmasını beklemek yerinde olurdu. Ama Riemann'ın sanki bir misyonu vardı ve Buda'nın dediği gibi aslında zamanının olmadığını biliyordu. Nitekim  c yıl sonra doktora tezinin devamı sayılabilecek bir çalışma daha yayımladı. Abelyen Fonksiyonlar Kuramı adını taşıyan bu çalışmasıyla Berlin Akademisi'ne seçildi ve Göttingen'de doçent oldu.

Riemann'ın bu çalışmasında bulunduğu en kuramsal sonuçlardan biri de bir Riemann yüzeyinde belli özellikleri sağlayan fonksiyonlardan ne kadar bulunacağı yönünde bir eşitsizliktir. Dört yıl sonra onunla çalışmaya gelen yirmi iki yaşında bir delikanlı bu eşitsizlik üzerine düşünmeye başlar ve hangi eklemelerle bu eşitsizliğin bir eşitlik haline getirileceğini bulup sonuçları 1863 yılında yayımlar. Gustav Roch adlı bu genç iki yıl sonra verem olur ve sağlığına iyi gelir umuduyla gittiği Venedik'te yirmi altı yaşında ölür. Bugün bu eşitlik Riemann-Roch teoremi diye anılır.

## Gerçek Hayat

Yaklaşık yüz yıl sonra Valery Goppa adlı genç bir Rus matematikçi Riemann-Roch teoremini kullanarak kodlama kuramında yeni kodlar buldu ve bu çalışmasıyla ödül aldı. Kodlama kuramı, haberleşmede kullanılan mesajların yolda bozulsalar bile vardıkları yerde tekrar tanınabilmesi için nasıl kodlanmaları gerektiği üzerine kafa yoran bir bilim dalıdır. Örneğin DVD'lerin üzeri çizildiğinde kaybedilen bilgi okunan diğer bilgiler sayesinde, kodlama kuramı teknikleri kullanılarak tekrar oluşturulabilir ve görüntü kesintisiz izlenir.

Bu bilgiler gerçek hayatta ne işimize yarayacak diyenlere ithaf olunur!

## Asal Sayılar Her Yerde

Biz tekrar 1857 yılına dönersek, Riemann'ın Berlin Akademisi'ne seçilmesi nedeniyle  det olduğu üzere son çalışmalarını özetleyen bir rapor yayımlaması bekleniyordu. Elbette beklenen rapor son çalışması olan onu Akademi'ye se tiren Abelyen Fonksiyonlar Kuramı  zerine olacaktı. Sıradan bir ölümlü öyle yapardı. Ama o hocasından öyle görmemişti ki.

Berlin Akademisi için hazırladığı makale Riemann'ın hayatı boyunca sayılar kuramı üzerine yazdığı ilk ve tek makaledir. Verilen bir sayıdan küçük kaç asal sayı olduğunu hesaplamaya yönelik bu makale, Euler'in reel sayılar için kullandığı bir fonksiyonu alıp karmaşık sayılarla yeniden hesaplamaya kalkışır. Kurduğu bu fonksiyon bugün Riemann'ın zeta fonksiyonu olarak bilinir. Aslında düzlemin sadece bir kısmında tanımlı olan bu fonksiyonu gamma fonksiyonu yardımıyla tüm düzleme yayar ve asal sayıların dağılımlıyla bu fonksiyonun sıfırları arasında ilişkiler kurar. Özellikle bu fonksiyonun sıfırlarının, reel kısmı 0 ve 1 arasında olanlarının, asalların dağılımlında söz sahibi olduğunu gösterir. Bir paragrafın ortasında ve laf arasında "bu sıfırların hepsinin reel kısmı  $\frac{1}{2}$  gibi görünüyor. Biraz uğraştum g steremedim, ama zaten şimdilik o kadar da gerekli değil" der. Bugün Riemann sanısı diye anılan ve matematik tarihinin  z lmemiş en büyük problemi işte böyle doğmuştur. Riemann o sıralar sadece otuz bir yaşındaydı.

Yirminci yüzyılın başında dönemin efsanevi matematikçilerinden Hilbert'e bir sohbet sırasında "insanları dondurup binlerce yıl sonra uyandırmanın yolunu bulmuşlar. Siz binlerce yıl sonra uyansanız ilk ne yapardınız" diye sorduklarında "Riemann sanısı  z lm ş m , onu sorarım" diye yanıtlamıştır. 1900 yılında Dünya Matematikçiler Birliği toplantısında açıkladığı ve yirminci yüzyıl matematiğine yön veren yirmi  c problemden sekizincisi Riemann sanısıdır.

Gustav Roch



Maggiore Gölü



Bu listedeki tüm problemler, aralarında Riemann sayısının da bulunduğu üç problem hariç, çözülmüştür. Bugün de Clay Matematik Enstitüsü'nün çözene bir milyon dolar vermeyi vaat ettiği yedi problemden henüz çözülemeyen altı tanesinden biri Riemann sayısındır.

Bu problemi değil kendi çözmek, sadece ölmeden nasıl çözüldüğünü görmek için milyonlarca dolar vermeye hazır çok matematikçi tanıyorum, şimdi isim vermeyeyim!

Riemann'ın mezar taşı yazısı



## Her Güzel Şeyin Bir Sonu Vardır

Riemann otuz üç yaşına geldiğinde profesör olur ve Gauss'un ölümüyle Dirichlet'e verilen ama onun da ölümüyle boşalan kürsünün başına getirilir. Üç yıl sonra evlenir. Mutlu bir evliliği vardır ama sağlık sorunları yakasını bırakmaz. Doktorların tavsiyesi üzerine sık sık Güney'e, İtalya'ya gidip kışları orada geçirmeye başlar. Ama sağlığı bir türlü iyiye gitmez. 1866 yılında, kırk yaşında, İtalya'nın Selega kasabasında Maggiore Gölü kıyısında karısıyla el ele tutuşup dua ederek canını teslim eder. Son sözü "çocuğumuzu öp" olur. O muhteşem beyin artık hesaplamayı durdurmuştur. Yerlerine geçtiği Gauss'un ve Dirichlet'in beyinleri Göttingen Üniversitesi Fizyoloji Bölümü'nde saklanmaktadır. Onun beyni ise geldiği yere, toprağa dönmüştür.

Bugün matematikte seksene yakın kavram Riemann adıyla anılır. Ay'ın üzerindeki 110 km çapında bir kraterine onun adı verilmiştir. 4167 kod numaralı gezegen de onun adıyla anılır.

Bir matematikçi olarak kırk yaşından sonra boş geçirdiği her dakikada insan hak edilmemiş bir nefesin ağırlığını hissediyor Riemann'ı tanıdıktan sonra.

### Kaynaklar

- MacTutor, Matematik Tarihi Arşivi, <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>
- Wikipedia, <https://www.wikipedia.org/>
- *Bernhard Riemann Collected Papers*, (Çeviri: Roger Baker, Charles Christenson, Henry Orde), Kendrick Yayınevi, 2004.
- Laugwitz, D., *Bernhard Riemann 1826-1866, Turning Points in the Conception of Mathematics*, Birkhauser, 1999.
- Monastyrsky, M., *Riemann, Topology and Physics*, Birkhauser, 1999.
- Sertöz, S., *Matematiğin Aydınlık Dünyası*, TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları No: 36, 1996.