ANTİKA PROBLEMLER

İçinde bulunduğumuz çağın bize olağanüstü hediyeler sunduğunu kabul etmek gerekir. Telefonlar, arabalar, bilgisayarlar (dizüstü ve cep), televizyonlar, çamaşır ve bulaşık makineleri bunlardan bir kaçı. Daha da nasıl icatlar hayatımıza girecek bilemiyoruz. Bildiğimiz tek şey bu keşiflerin arkasının kolay kolay kesilmeyeceği. Buna karşılık bizler de bu değişime kayıtsız kalmıyoruz. Piyasaya yeni çıkmış bir makineyi artık eskisinden daha kolay ve çabuk benimsiyoruz. Hayatımıza girmesine direnmeden izin veriyoruz. Şöyle bir 15 yıl öncesine kadar "ıssız bir adaya düşsen yanına alacağın üç şey nedir" sorusuna verilen üç cevaptan biri "renkli ekran bir televizyon" şeklinde olurdu. Şimdilerdeyse içinde zaten telefonu ve televizyonu da barındıran (internet bağlantılı) bilgisayarlar tercih ediliyor. Ama bütün bu makineleri üretmek öyle bir anda olmuş bir olay değil. Bugün sahip olduğumuz herşeyi bizlerden önce yaşayan hemen her insanın milyonlarca yıl biriktirdiği bilgiye borçluyuz. Söz gelimi zaman içinde yolculuk yapmak mümkün olsaydı da şöyle yontma taş devrine gidebilseydik, bir bilgisayar üretebilir miydik dersiniz? Somut bir üretim yapmak zor tabiki. Parçaların herbirini üreten ayrı bir makine lazım, sonra enerji de gerekli. Peki bu alternatifi geçmişe dönüp o zamanlar çözülmemiş bir matematik problemini çözmek için kullansak durum farklı olur mu? Ne de olsa ihtiyacımız olan tek şey kağıt kalem ve bilgi. Soru yazıldığına göre kağıt ve kalem varmış, bilgiyi de biz götürürüz. Götürdüğünüz çözümü o zamanın insanları öyle kolay kolay benimseyemez belki ama bu, yontma taş devrinde bilgisaya üretmek kadar imkansız da değil. Arada edinilmiş kimbilir belki 1000 yıllık bir bilgiyi oturup baştan taramak gerekiyor, o kadar!

3 Klasik Problem

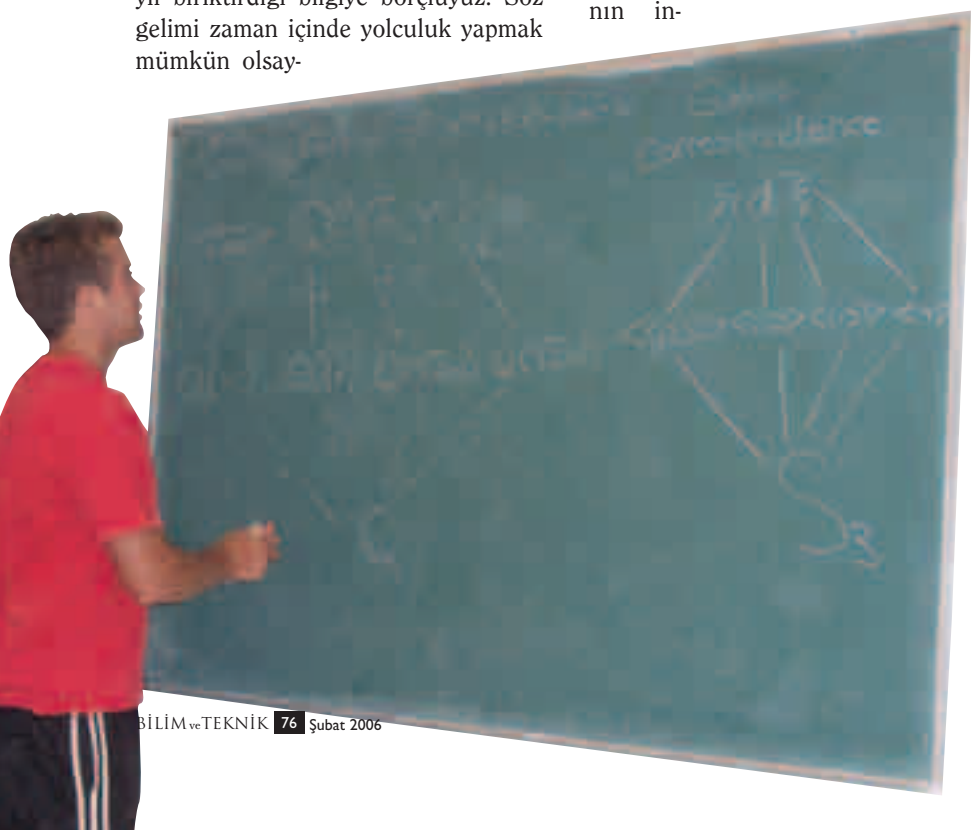
Bir pergel ve (ölçüsüz) bir cetvel kullanarak

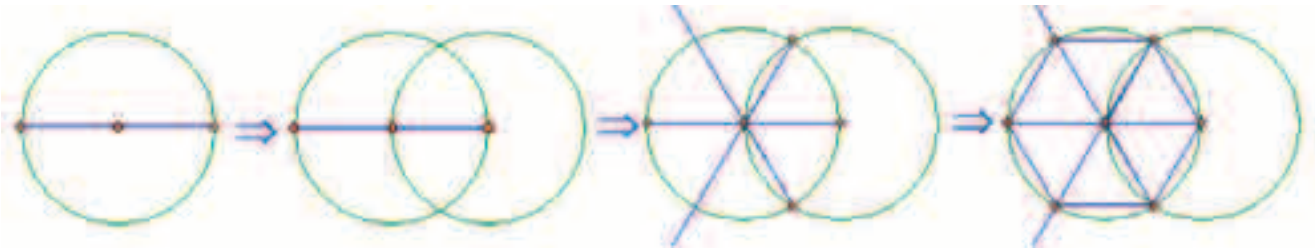
Bir açıyı üçe bölmek

Bir küpün hacminin iki katına eşit hacimli bir küp çizmek

Bir çemberinin alanına eşit alanlı bir kare çizmek mümkün müdür?

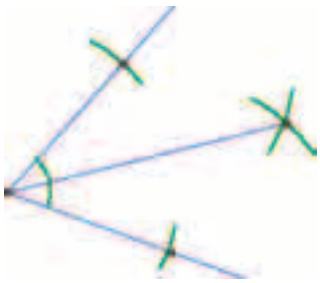
Matematikle ders harici birazcık ilgilenmişseniz antik Yunan tarihininden (MÖ 500 civarı) çıkma bu 3 problemi, özellikle de birincisini ve onun imkansızlığını duymuş olmanız gerekir. Tabii bu işleri yapabilmek için kullanacağınız aletleri amacından farklı şekilde kullanmaya teşebbüs edebilirsiniz işte o zaman bunların mümkün olduğunu ispatlayabilirsiniz. Fakat kural ihlali nedeniyle bu doğru bir çözüm olmaz. (Bu konunun kuralları ve yapılabilecek olası hataları bu ayki "Bir Buluşum Var" köşesinde etraflıca ele aldık.) Üstelik içiniz rahat olsun ki bu çizimlerin yapılabilmesinin imkansız olduğu soruların formüle edilmesinden yaklaşık 2000 yıl sonra da olsa bulunmuştur. 2000 yıl öncesinde soruyu ortaya atan kişilerin bu ispatı görüp anlamaları için zaman içinde birikmiş bilgiyi de özümsemeleri gerekir. Eğer cebirde grup kuramının derinliklerine inmemiş ve Galois Kuramı üzerine hiç bilgi edinmemişseniz durum sizin için de onlardan çok farklı değil. Benzer şekilde Fermat'ın o çok kolay anlaşılır ama çözülmesi 300 yıl alan son teoreminin ispatını da anlamak sağlam bir temel gerektiriyor. Bu nedenle soruyla amatörce uğraşan pek çok kişi ispatı görünce hayal kırıklığına uğruyor.





Açıyı ikiye bölmek

Kolayca ispatlanan ya da çözülen teorilerin ilgi çekmeleri zor. Açıyı 3'e bölmenin imkansızlığından bu kadar yaygın olarak bahsedilince ister istemez sıralamada 3'den önce gelen 2 rakamının nasıl bir durum yarattığı merak uyandırıyor. Düz bir mantıkla "eğer açıyı 2'ye bölmek imkansız olsaydı o da bu problem kadar ünlü olurdu" diyerek açıyı ikiye bölmenin mümkün olduğunu düşünenlerdenseniz doğru yoldasınız. Ama bunu geometrik yönden araştırmayı da ihmal etmemek gerekir. İşte açıyı ikiye bölmenin yolu:



İkiye bölünecek açı ABC açısı olsun. Pergelinizle önce B merkezli bir çember çizin ve açının kollarını A ve C'de kessin,daha sonra açıyı bozmadan C ve A merkezli çemberleri çizin. Bu çemberlerin iki kesişim noktası olur: B ve D. Bu noktaları birleştirdiğimizde ortaya çıkan doğru ABC açısının açıortayıdır. Şekilde çemberlere ait yay parçaları gösteriliyor. Çemberleri açıkça çizip BD doğru parçasının açıortay doğrusu olduğunu ispatlamasını okuyucumuza bırakalım (ikizkenar üçgenlerle kolayca görülebilir).

Çizilir mi Çizilmez mi?

Aslında pergel ve ölçüsüz cetvel kulanarak yapılıp, yapılamayacağı merak edilenlerin listesi bu 3 öğeyle sınırlı değil. Düzgün bir çokgenin çizilebilir olup olmadığı da uzunca bir süre merak konusu olmuş. Düzgün çokgenden kasıt, kenarları birbirine eşit uzunlukta ve tüm iç açıları eş olan kapalı şekil, eşkenar üçgen, kare, eşkenar beşgen, altıgen gibi... Burada sonsuz eleman olduğunu düşünürsek listenin soru sayısının oldukça genişlediği kolaylıkla farkedilir. Bu şekillerden ilk birkaçının çizimi hemen yapılabiliyor. Örnek olarak 6'genin çizimini veriyoruz ve eşkenar üçgen ve karenin çizimlerini denemenizi tavsiye ediyoruz.

Benzer şekilde bu sorular için de çizilmesi imkansız olduğu düşünülenler için bir ispat vermek yüzyılları bulmuş. Ama gelen ispat belli bir n-genin çizilemeyeceğinden ziyade tüm n'ler için bir genel sonuç verdiğinden oldukça kıymetli.

Yüzlerce yıl cevapsız kalan bu konuya ışık tutan kişinin Gauss olduğunu söylersek şaşırmazsınız belki ama ortaya çıkan sonucu görünce bir parça şaşırmanız beklenebilir. Gauss öncelikle bir türlü çizilemeyen ve bu nedenle çizilmesi imkansız olarak düşünülen düzgün 17-geni pergel ve ölçüsüz cetvel kulanarak çizmeyi başardı (üstelik bunu yaptığında henüz 19 yaşındaydı). Bundan 5 yıl sonra da çizilebilir düzgün çokgenleri genelledi:

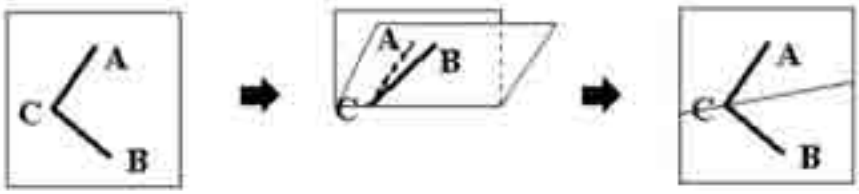
n	çarpanları
3	$2^0 \cdot 3$
4	2^2
5	$2^0 \cdot 5$
6	$2^1 \cdot 3$
7	çizilemez
8	2^3
9	çizilemez
10	$2^1 \cdot 5$

Bir düzgün n kenarlı (n-gen) sadece pergel ve ölçüsüz cetvel kulanarak çizilebilirdir eğer n şu şekilde yazılabiliyorsa: $n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_z$, öyle ki p'ler birbirinden farklı Fermat asalı yani $p_i = 2^{2^k} + 1$ şeklinde yazılabilen asallar. Gerçi kendisi bu teoremi çizilebilirler için yeter şart olarak vermişti ama gerek şart olduğuna da inanıyordu. Bunun ispatı da geç olmadan Pierre Wantzel'den geldi. Yani artık kimin çizilebilir kimin çizilemez olduğuna Fermat asalları karar verecekti. Şimdiye kadar sadece 5 tane Fermat asalı bulundu (ki bunlar:3, 5, 17, 257, 65537) Sonlu olup olmadığı da merak konusu. Bu konunun böyle özel ve nadir bulunur sayılara bağlı bir sonuca varması sizce de ilginç değil mi? Teoremi örneklendirmek açısından şu tabloyu incelemek de işe yarayabilir:

Bu olup bitenlerin hepsi bir oyun ve oyunun kuralları eski çağlarda yaşayanlar tarafından konulmuş. Siz kendi kurallarınızı koyarak farklı bir kuram üretebilirsiniz. Her seferinde yapabileceklerniz ve yapamayacaklarınız değişecektir. Örneğin araçlarınız pergel ve cetvel yerine sadece şekil çizdiğiniz kağıdı katlamaksa açıyı üçe bölebilir ya da çemberinin alanına eşit alanlı bir kare çizebilirsiniz. Bu kuram geniş olarak Humiaki Huzita isimli İtalyan-Japon matematikçi tarafından çalışlmıştır(1992).

Nilüfer Karadağ
karadagnilufer@yahoo.com

Kaynakça:
http://www-math.cudenver.edu/~wcherowi/courses/m3210/hg3lc5.html
http://www.jimloy.com/geometry/trisect.htm



Kağıt katlama yoluyla bir açının 2'ye bölünmesi

Bir Buluşum Var

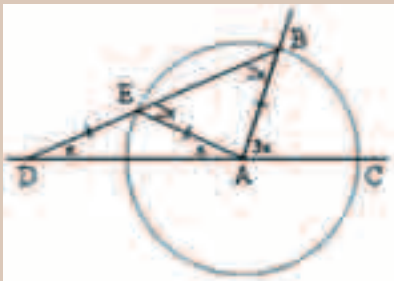
Açıyı Üçe Bölmek

Ben Cihat Oktay. 2004 yılı Ocak ayı Bilim ve Teknik dergisinde "Matematik Kulesi"nde bir soru vardı ve bu sorunun cevabı yoktu, daha doğrusu imkansız olduğu ispatlanmıştı. Bu soru "Açıyı Üçe Bölmek" başlıklı yazının altındadır.

Yazıda sorulan şu idi: "Sadece bir pergel ve işaretlenmemiş bir cetvel (düz bir çubuk) yardımıyla verilen bir açıyı üçe bölebilir misiniz? Arşimet'in yaptığı yönteme bir şeyler ekleyerek belki bu mümkün olabilir. Sorunun altında iki şart vardı ve bu iki şart aynı anda sağlanmak isteniyordu. Ancak Arşimetin yaptığı çalışmada bunlar sağlanmadığı için çözüm doğru kabul edilemedi. Bu iki şart şudur:

1) BED doğru parçasında, D noktası AC doğrultusunda olmalı,

2) ED'nin uzunluğu çemberin yarı çapına eşit olmalı.



şekil1

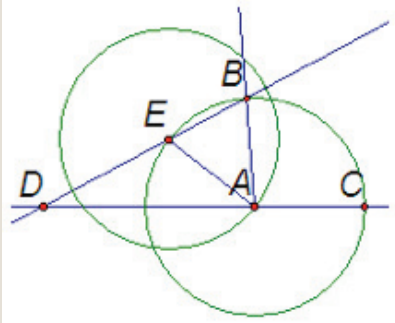
Şimdi bir çubuk ve pergel alıp beni takip edin. Üzerine çemberin merkezini çizebileceğimiz bir doğru alın ve pergel yardımıyla istediğiniz büyüklükte bir çember çizin. Ben merkezi A noktası olan bir çember aldım.Çizilen bu çemberin yarıçapı |AC| uzunluğundadır. Şimdi yarıçapı |AC| ile aynı uzunlukta (yani pergelin açısını bozmadan) ancak merkezi, çizdiğimiz çemberin üzerinde olacak şekilde bir çember çizin. Çizdiğimiz bu çemberin merkezi E olsun. Merkezi E noktasında olan çember ile çizdiğimiz doğrunun kesiştiği nokta, D noktası olsun. Şimdi bu D noktasıyla E noktasını birleştirerek merkezi A noktası olan çemberin üzerinde bir B noktası alalım. Evet geriye sadece çemberlerin merkezlerini (A ve E noktalarını) ve B ve A noktalarını birleştirmek kalıyor.

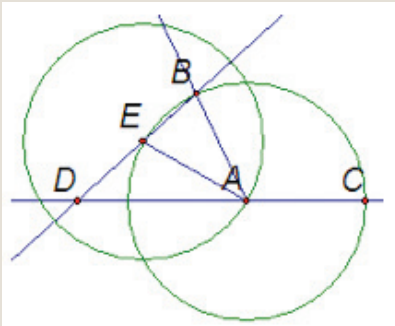
şekil2

Gördüğünüz gibi |DE|=|AE|=|AB|=|AC| dir. Böylece EDA açısından kodlamaya başlarsak; $\angle EDA = \angle EAD = \alpha$, $\angle BEA = \angle EBA = 2\alpha$ ve $\angle BAC = 3\alpha$ olur. Böylece BAC açısını üçe bölmüş oluruz. Sizinde fark edeceğiniz gibi burada bir açıyı üçe bölmekten ziyade bir açının 3 katını alarak çözüme ulaşılmıştır. Yani istediğimiz bir açıyı üçe bu yöntemle bölemeyiz. Kullanılan açıları hesaplamak olanaksız sanırım. Açılar tamamen tesadüfi eseri bulunmaktadır. Matematik hayatınızı anlamlı kılsın. Teşekkürler

Cihan Oktay

Cihan arkadaşımızın matematiğin oldukça sıkı takipçilerinden olduğu kolayca anlaşılıyor. Kendisine buluşunu bizlerle paylaştığı için teşekkür ediyoruz. Açıyı üçe bölmek problemi onunla uğraşanları belkide en çok yanıltan problem olarak tarihe geçmiştir. Bunun sebebinde kuralların yanlış anlaşılması yatıyor. Aslında kurallar net: pergeli çember çizmek için (Cihan arkadaşımızın yaptığı gibi açıyı hiç bozmadan kullanabilirsiniz), cetveli de (ölçü kullanmadan) sadece düz çizgi çizmek için kulllanıyoruz. Öncelikle Cihan arkadaşımızın bahsettiği Arşimet'in yanlış çözümünü açıklayalım. Şekil1'i takip edebiliriz. 3'e bölmeyi tasarladığınız açı:BAC. Bunu başlangıçta belirtmek önemli! Pergelin ucunu A noktasına koyup bir çember çizin. Şimdi BED doğrusunu öyle çizin ki D, AC doğrusu üzerinde olsun ve |DE| uzunluğu çemberin yarıçapına eşit olsun. Gerisi de şekilde görüldüğü gibi EDA açısı 3x açısı 3'e bölünmüş hali (x) oluyor. Arşimetin burada en temel kuralı ihlal ediyor: cetveli ölçme işlemi için kullanıyor. Bunu da |DE| uzunluğunu çemberin yarıçapına eşit olmasını sağlarken yapıyor. Çünkü hem B,E,D doğrusal olmalı hem de |DE| yarıçapa eşit olmalı. Cihan arkadaşımız Arşimet'in bu hatasını ortadan kaldırmak için kuralların doğrultusunda güzel bir hamleyi denemiş ve pergeli açısını bozmadan kullanmış ama maalesef çok sık yapılan bir hatayı yapmış: rasgele bir açıyı 3'e bölmek yerine rasgele bir açıyı 3'e katlamış. Bu ikisi benzer gözükse de aynı şeyler değil. Çünkü açıyı üçe bölmek için işe o açıyla başlamanız lazım. Cihan arkadaşımız yola Arşimet gibi BAC açısını rasgele seçerek bu şekilde çıksaydı B,E,D noktalarının doğrusallığını sağlamanın mümkün olmayacağı sonucuyla karşılaşacaktı. Aşağıdaki şekillerden görülüyor ki bu doğrusallığı sağlamak eldeki materyallerle mümkün değil. Sağlanmayınca da şekil2'ye bakarsanız DEA üçgeninin dış açısı gibi gözüken 2α dış açı olmaktan çıkar ve içeridek açılar α da olmaz ve 3α'yı 3'e bölmüş olmayız. Ve biz önce B ve E'yi seçtiğimizden bu doğrunun AC'yi kesen D noktasının çember üzerinde olmasını garanti edemeyiz. Bunu garanti edemeyince de |DE|uzunluğunun yarıçapa eşit olmasını sağlayız ve bütün teori çöker. İşte rasgele 2 çizim, ikisinde de DEA olması beklendiği gibi ikizkenar çıkmıyor:





Unutmamamız gereken son bir nokta da şu bir açıyı üçe bölmek yetmiyor.Cetvel ve pergel yardımıyla üçe bölünebilen açılar yok değil, örneğin 90° ve 180°. Ama bu kuramın amacı alınan rasgele bir açının üçe bölünmediğini kanıtlamak. Bunun ispatı da 1837 Pierre Wantzel tarafından yapıldı. Bu tarz büyük ispatlar çok anlaşılır görünmeyebilir ama en azından incelemeyi denemenizi tavsiye ederim.

Nilüfer Karadağ
karadagnilufer@yahoo.com

Eğer siz de kaydettiğiniz önemli bir bulgu olduğunu düşünüyorsanız dergimize gönderin ve onu sizin için değerlendirelim. Adresimiz:

TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi,
Buluşumu Değerlendirin Köşesi,
Atatürk Bulvarı No:221
Kavaklıdere-ANKARA