Matematik Dünyası

Bilkent Matematik Topluluğu

Beyefendi, Asker ve Matematikçi
Descartes

Daha çok, filozof yönüyle tanınan, ama aynı zamanda matematik tarihinin de en büyük isimlerinden biri olan Descartes, bundan tam dört yüz yıl önce, 1596'da doğmuş. Gerek felsefe, gerekse matematik üzerine yazdığı eserler, bu bilimlerin gelişimine önemli ölçüde katkıda bulunmuştur ve bugün de etkilerini sürdürmektedir.

Descartes denince herkesin aklına ilk önce çokça bilinen, Metot Üzerine Konuşma (Discours de la Méthode) adlı kitabı gelir. Ama Descartes'ın, dünya bilim tarihinde, en az bu kitap kadar önem taşıyan bir başka önemli eseri daha vardır: Geometri (La Géometrié). Bu kitapla birlikte Descartes için, bugün şu sözler söylenir: "Descartes geometriyi gözden geçirip, değişiklikler yapmamış, geometriyi yaratmıştır".

Gerçekten de, bugün, bizim analitik geometri adı ile kullandığımız sistemin ilk düşüncesi Descartes'a aittir. Descartes, cebiri, geometriye uygulayarak, bir çığır açmış ve verdiği yeni tanımların uygulanabilirliği sayesinde, kısa sürede bilimin birçok dalında kolaylıklar sağlanmıştır. Descartes'ın geometrisinde ana düşünce şudur: Düzlemde birbirini dik kesen iki sabit doğrunun var olduğunu kabul ediyoruz. Düzlemimizi, bir şehir, sabit doğrulardan birini bir şehri kuzeyden güneye kateden uzun ve düz bir yol; diğerini de şehri doğudan batıya kateden yine düz ve uzun, ama aynı zamanda diğer yolu dik kesen bir başka yol olarak düşünelim. Bu iki yol, şehri dört bölgeye ayırır. Sıra şimdi şehirdeki her evin adresini belirlemekte: Artık, sadece iki sayı ve evin bulunduğu bölge verilirse bu evin nerede olduğunu söyleyebiliriz: Bir evin kuzey-güney yolundan uzaklığı ilk sayımız, doğu-batı yolundan uzaklığı da ikinci sayımız olsun. Şimdi biri gelip de size adres diye iki sayı söylerse, hemen ona aradığı yerin nerede olduğunu söyleyebilirsiniz. İşte Descartes da böyle bir yöntemle, düzlemi kolayca anlaşılabilir bir duruma getiriyor.

Aşağıda, Descartes'ın La Géometrié (1637) adlı kitabından bir alıntı vardır. Eserin yazıldığı yıllarda, metematik dili yeterince gelişmemiş olduğundan, matematik yazıları oldukça uzun ve karmaşık cümleler içeriyordu. Okuyacağınız yazıda da, böyle zor anlaşılan ifadelerle karşılaşabilirsiniz.

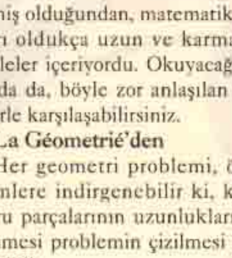

R. Descartes (1596-1650)

La Géometrié'den

Her geometri problemi, öyle terimlere indirgenebilir ki, kimi doğru parçalarının uzunluklarının bilinmesi problemin çizilmesi için yeterlidir.

Nasıl aritmetikte toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve kök alma gibi işlemler varsa, geometride de istenen doğru parçalarını bulmak için, başka doğru parçaları toplanmalı ya da çıkarılmalı; ya da bir doğru parçasını birim olarak tanımlayarak uzunluğu herhangi iki doğru parçasının uzunluklarının çarpımına ya da bölümüne eşit olan bir doğru parçası çizilebilir.

Örnek olarak AB birim olsun ve BD ile BC'nin çarpımı istensin. Sadece A ile C yi birleştirmem ve CA ya paralel olarak DE yi çizmem yeterlidir. Buna göre BE, BD ile BC nin çarpımıdır.



BE yi, BD ye bölmek gerekirse, E ile D yi birleştirir ve AC yi DE ye paralel olarak çizerim. Buna göre BC bölme işleminin sonucu olur.

GE nin kare kökü istenirse, GH ye aynı doğrultuda bir birimlik FG uzunluğunu eklerim. Daha sonra FH nin orta noktasına K derim ve K merkezli FH çaplı çemberi çizerim. G den FH ye dik çıkarsam ve bu dikmenin çemberi kestiği noktalardan birine I dersem, GI istenen kare kök olur. Şu anda burada, küp kök, ya da diğer köklerden bahsetmiyorum, çünkü ilerde onlardan daha ayrıntılı bir şekilde bahsedeceğim.

Genellikle, doğru parçalarını kağıda çizmek yerine, her birini tek bir harfle göstermek yeterlidir. Yani, BD ile GH doğru parçalarını toplamak için, doğru parçalarından birini a, diğerini b ile gösterip toplamı $a+b$ diye yazacağım. Sonuç olarak, a-b, b nin, a dan çıkarıldığını, ab, a ile b nin çarpıldığını, a/b, a nın, b ye bölündüğünü, a^2 da a nın k kez kendisiyle çarpıldığını gösterecektir. Yine, a^2+b^2 nin kare kökünü

$$\sqrt{a^2+b^2}$$

ile göstereceğim. Burada benim, a^2, b^2 ya da benzer ifadelerle, doğru parçalarını anlatmak istediğim görülmelidir. Kare, küp, ya da benzer sözcükleri kullanmamın nedeni, terimleri cebirdeki görevleriyle kullanabilmektir.

Ayrıca, birim tanımlanmamışken, her doğru parçasının aynı boyut sayısıyla gösterilmesinin gerekliliği de gözlemlenmelidir. Sonuç olarak, a^3, abb ve b^3 aynı boyut sayısına sahiptir ve bunlar

$$\sqrt[3]{a^3-b^3+abb}$$

ile tanımlanan doğru parçasının bölümleridir. Ama birim tanımlanmışken durum aynı değildir. Örnek olarak a^2b^2-b nin küp kökünü almak gerekirse, a^2b^2 ifadesini birime bölündüğünü ve b ifadesinin iki kez birimle çarpıldığını düşünmeliyiz.

Son olarak, doğru parçalarının adlarını hatırlamak için, adlar değiştirildikçe ayrı bir liste yapılmalıdır. Örnek olarak, $AB = 1$, yani AB, 1 e eşittir; $GH=a$, $BD=b$ ve buna benzer biçimde bir liste yapabiliriz.

Sonra, bir problemi çözmek istersek, çiziminde gerekli olacağını düşündüğümüz, uzunluğu bilinen ya da bilinmeyen tüm doğru parçalarına birer ad veririz. Daha sonra, bilinen ve bilinmeyen doğru parçaları arasında ayrım yapmadan, bu doğru parçaları arasındaki ilişkileri gösteren yöntemlerle, problemin zorluğunu azaltmaya çalışmalıyız, öyle ki sonuçta bir niceliği, iki farklı biçimde ifade edebilelim. İki ifadedeki terimler birbirlerine eşit olduğu için ortaya çıkan duruma bir eşitlik deriz ve bilinmeyen doğru parçası sayısı kadar eşitlik bulmaya çalışırız; ama eğer verilen bilgilerin hepsini kullanarak istenen sayıda eşitlik bulunamıyorsa, sorunun bütünüyle belirlenemediği açıktır. Böyle bir durumda hiç bir eşitlikle ilişkilendirilemeyen her bilinmeyen doğru parçası için herhangi bir uzunluk verebiliriz.

Birden fazla eşitlik varsa, her birini tek tek düşünerek ya da diğerleriyle karşılaştırarak, her bilinmeyen doğru parçası için bir değer bulmak için kullanmalıyız. Ve sonunda, ya bilinen bir doğru parçasına eşit; ya da bir tamsayı kuvveti, bilinen niceliklerin çeşitli işlemlerle elde edilen sonucuna eşit olan tek bir bilinmeyen doğru parçası kalana dek eşitliklerle uğraşmalıyız. Örnek olarak

$$z=b$$

ya da

$$z^2=-az+bb$$

ya da

$$z^3=az^2+bbz-c^3$$

ya da

$$z^4=az^3-c^3z+d^4, \text{ vb}$$

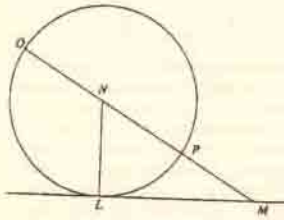
Burada problem, çemberler, doğrular, konikler ya da derecesi bunlardan bir veya iki fazla olan eğriler ile oluşturuluyorsa, tüm bilinmeyen nicelikler tek bir nicelik cinsinden ifade edilebilir.

Bunu daha ayrıntılı bir şekilde anlatmaktan vazgeçmeyeceğim, çünkü sizi bu konuda kendi kendinize ustalaşma zevkinden yoksun bırakmalıyım. Ayrıca bunun üzerinde çalışarak aklınızı geliştirme avantajından da yoksun kalıyorsunuz, bu ise bence bilimden elde edilebilecek ana kazançtır. Çünkü, bu konu sıradan geometri ve cebir bilgisine sahip biri tarafından çalışılamayacak kadar zor değildir.

Bu eşitlikleri çözerken, bir öğrenci mümkün olan yerlerde işlemleri kullanarak problemi en basit terimlere indirgeyebiliyorsa kendimi mutlu sayacağım.

Örnek olarak $z^2=az+bb$ ise LM kenarı b yani bilinen bb ifadesinin karekökü ve LN kenarı $a/2$ olan NLM dik üçgenini çizerim. Daha sonra MN yi yani bu üçgenin hipotenüsünü uzatır ve bu doğru üzerinde NO, NL ye eşit olacak şekilde O noktasını buluruz. Burada OM doğru parçası istenen ifade olan z ye eşittir. Şu şekilde de ifade edilebilir:

$$z=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$$



y istenen ifade olmak üzere, $yy = -ay + bb$ eşitliği varsa, aynı NLM dik üçgenini çizerim ve NP, NL ye eşit olacak şekilde, MN hipotenüsü üzerinde P noktasını bulurum. Buna göre PM, y ye yani istenen köke eşittir. Sonuç olarak

$$y=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$$

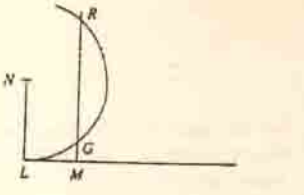
elde ederiz. Aynı yöntemle

$$x^4=-ax^2+b^2$$

eşitliği varsa PM, x^2 ye eşit olacaktır ve

$$x=\sqrt{-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$$

dir ve diğer durumlar da benzer şekilde bulunur.



Son olarak, $z^2= az-bb$ ise önceki gibi NL yi $a/2$ ye LM yi b ye eşit alırım ve sonra M ve N yi birleştirmek yerine LN ye paralel MGR yi çizerim, öyle ki N merkez olmak üzere L den geçen çember MGR yi G ve R de keser. Ardından z, yani istenilen doğru parçası MG ya da MR dir. Bu durum iki farklı şekilde ifade edilebilir.

$$z=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$$

ve

$$z=\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$$

dir.

N merkezli ve L den geçen çemberin MGR ile ortak noktası yoksa denklemin hiç kökü yoktur, böylece çizimin olanaksız olduğunu söyleyebiliriz.

Bu aynı kökler, birçok metodla bulunabilir. Burada, açıkladığım dört şekilden daha fazla bir şey içermeyen şeyler yaparak sıradan geometri problemlerinin hepsinin çizilebileceğini göstermek üzere, oldukça kolay olanlarını yaptım. Bunu eski matematikçilerin gözlemlemediklerini düşünüyorum. Aksi takdirde, kesin bir yöntem bulamadıklarını gösteren ilk önerme dizilerini içeren birçok kitap yazmak için fazla emek sarfetmezlerdi; bunun yerine rastlantı sonucu elde ettikleri önermeleri bir araya getirirlerdi.

Çözmece

1. Negatif olmayan tüm a, b, c gerçel sayıları için

$$\sqrt{a^2+b^2+ab}$$
$$\le\sqrt{a^2+c^2-ac}+\sqrt{b^2+c^2-bc}$$

olduğunu gösteriniz.

2. m, n, k tam sayılar ve $m,n\geq k\geq 1$ olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{m+n}{k}$$

olduğunu gösteriniz.

Geçen ayın çözümleri

1.

$$\sum_{k=0}^{p^n-1}\binom{p^n-1}{k}(-1)^k x^k=(1-x)^{p^n-1}$$

$$=\frac{(1-x)^{p^n}}{1-x}\equiv\frac{1-x^{p^n}}{1-x}$$

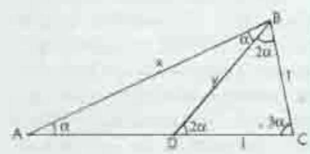
$$\equiv\sum_{k=0}^{p^n-1}x^k \pmod p$$

denkliği

$$\binom{p^n}{k}\equiv 0 \pmod p$$

olduğundan görülür. Denklikteki ilk ve son polinomların x^k terimlerinin denkliğinden istenilen denklik bulunur.

2. $\alpha=\pi/7$ olmak üzere, şekildeki ikizkenar üçgenlerden



$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)=\cos\widehat{A}=\frac{x}{y}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)=\cos\widehat{CBD}=\frac{y}{2}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)=\cos\widehat{C}=\frac{1}{2x}$$

bulunur ve bunların çarpımından istenilen eşitlik bulunur.

Problem Seminerleri

Problemlere doğru çözüm sunan katılımcılara ödüller verilecektir. Ödül kazanabilmek için, yazılı ve tam çözümler, ilgili problem seminerinin başlamasından önce postayla ya da elden Problem Seminer Grubu'na iletilmelidir.

Her seminerdeki dört problemden birincisi 1, ikincisi 2, üçüncüsü 3, dördüncüsü ise 5 puan değerindedir. Her doğru çözüm için ödül verileceği gibi, bir dönem boyunca yapılacak yedi problem seminerinde aldıkları toplam puana göre ilk üç sırayı elde eden katılımcılara, toplam puanları 30 un üstünde ise, ayrıca dönem ödülleri verilecektir.

Matematik Problem Seminerleri, 1996 Sonbahar Döneminde Ankara'da, "TÜBİTAK Bilim Adamı Yetiştirme Grubu, Atatürk Bulvarı, No.221 Kavaklıdere, Ankara" adresinde yapılmaya devam edilecektir.

Çözümlerin iletileceği mektup adresi şöyledir:
TÜBİTAK Bilim Adamı Yetiştirme Grubu,
Matematik Problem Seminerleri
Atatürk Bulvarı, No. 221
06100 Kavaklıdere- Ankara

Problem Semineri 96/11

6 Kasım 1996, Çarşamba , Saat: 15:30-17:30

1. n birden büyük bir tam sayı olmak üzere, n ve $n+2$ sayılarının her ikisinin birden asal olması için gerek ve yeter şartın

$$4[(n-1)!+1]+n\equiv 0 \pmod{n(n+2)}$$

olduğunu ispatlayınız.

2. $[x]$ ile x den büyük olmayan en büyük tam sayıyı, $\pi(x)$ ile de x den büyük olmayan asal sayıların sayısını gösterelim. $m>1$ bir tam sayı olmak üzere,

$$\pi(m)=\sum_{k=2}^{m}\left[\frac{(k-1)!+1}{k}-\left[\frac{(k-1)!}{k}\right]\right]$$

olduğunu gösteriniz.

3. $d\geq 2$ bir tam sayı ve a, $a+d$,..., $a+(n-1)d$ sayıları asal ve bir aritmetik dizinin ardışık terimleri olsun. q, $q\leq n$ olacak şekildeki en büyük asal sayı olsun. Bu durumda ya q dan küçük veya eşit asal sayıların çarpımı d yi böler, ya da $a=q$ dur ve q dan küçük asalların çarpımı d yi böler. İspatlayınız.

4. $l\geq 1$ bir tam sayı olsun. $k\geq 1$ tamsayı olmak üzere

$$A_l^{(k)}=\left\{q \mid q \text{ asal ve } l^{q-1}\equiv 1 \pmod{q^k}\right\}$$

olarak tanımlayalım. $A^{(k)}-A^{(k+1)}$ ile $A^{(k)}$ kümesinin, $A^{(k+1)}$ kümesinden farkını gösterelim. Tüm k tek sayıları için bu fark kümelerinin birleşiminin yani

$$\bigcup_{k\ \text{tek}}\left(A_l^{(k)}-A_l^{(k+1)}\right)$$

kümesinin sonsuz sayıda elemanı olduğunu gösteriniz.

Problem Semineri 96/12

20 Kasım 1996, Çarşamba, Saat: 15:30-17:30

1. xy koordinat düzleminde,

$$K=\{(x,y):0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\},$$

$$R_1=\left\{(x,y):0\leq x\leq\frac{1}{4},\ 0\leq y\leq\frac{1}{9}\right\},$$

$$R_2=\left\{(x,y):\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{1}{2},\ \frac{2}{9}\leq y\leq\frac{2}{3}\right\},$$

$$R_3=\left\{(x,y):\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{4},\ \frac{1}{3}\leq y\leq\frac{7}{9}\right\},$$

$$R_4=\left\{(x,y):\frac{3}{4}\leq x\leq 1,\ \frac{5}{9}\leq y\leq 1\right\}$$

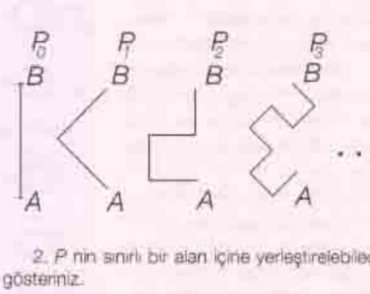
olsun.

$$f_1(f_1(K))\cup f_1(f_2(K))\cup f_2(f_1(K))\cup f_2(f_2(K))$$
$$=R_1\cup R_2\cup R_3\cup R_4$$

olacak şekilde R^2 ve R^2 ye tanımlı f_1 ve f_2 fonksiyonu bulunuz.

2., 3. ve 4. sorular aşağıdaki tanımlara göre düşünülmelidir.

(P_n) kümeler dizisi şöyle tanımlanıyor: P_0 düzlemde, uzunluğu 1 birim olan AB doğru parçası olsun. $n\geq 0$ olmak üzere P_{n+1}, P_n den şu şekilde elde ediliyor: P_n nin her doğru parçasını hipotenüs olarak kabul eden ikizkenar dik üçgenleri düşünelim. Bir karınca P_n de, A dan başlayarak, ilk doğru parçasının solundaki, ikinci doğru parçasının sağındaki üçüncünün solundaki... dik üçgenin dik kenarlarını izleyerek B ye ulaşıyor ve karıncanın izlediği bu doğru parçalarından oluşan yol P_{n+1} olarak tanımlanıyor. P_n dizisinin n sonsuza giderken bir limiti vardır, bu limite P diyelim.



2. P nin sınırlı bir alan içine yerleştirilebileceğini gösteriniz.

3. $P=f_1(P)\cup f_2(P)$ olacak şekilde, R^2 den R^2 ye f_1 ve f_2 fonksiyonlarının bulunduğunu gösteriniz.

4. P_n nin doğru parçalarından herhangi ikisinin, uç noktaları dışında kesişmediklerini gösteriniz.