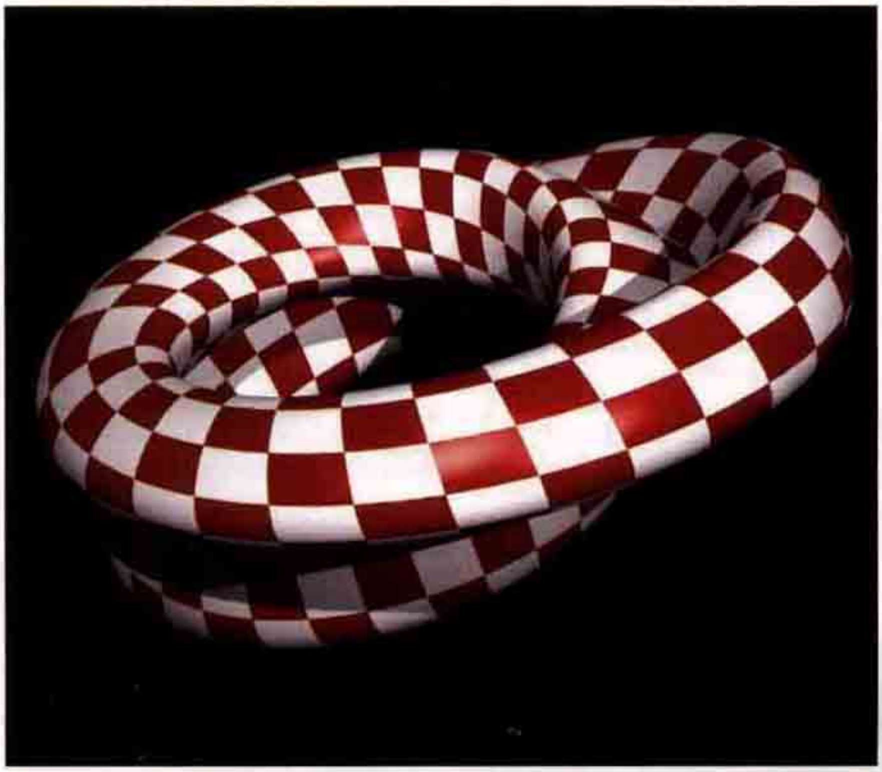


Pythagoras, dik üçgenler için tanımladığı ünlü dik kenarlar-hipotenüs bağıntısı, Gauss ise, belli bir aralıktaki tam sayıların toplamı için bulduğu pratik yöntem ile matematik tarihinde kendine yer edinmiş. Felix Christian Klein'ın en sevgili buluşu ise biraz farklı... Klein, bir matematikçi için fazla "elle tutulur, gözle görülür", bir heykeltraş için fazla soyut buluşuyla, kendi adıyla anılan ünlü şişesiyle matematik tarihine geçmiş. Klein şisesi son yüzyıldır cam zanaatkarlarının, son birkaç yıldır da bilgisayarda geometrik modelleme meraklılarının gözde oyuncaklarından...

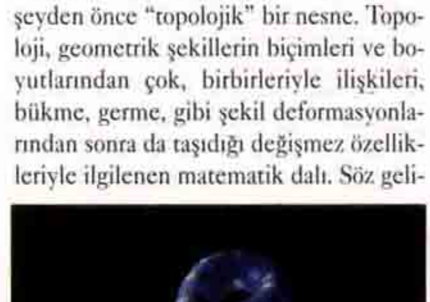
Bir Matematikçinin Sihirli Oyuncağı
Klein Şişesi

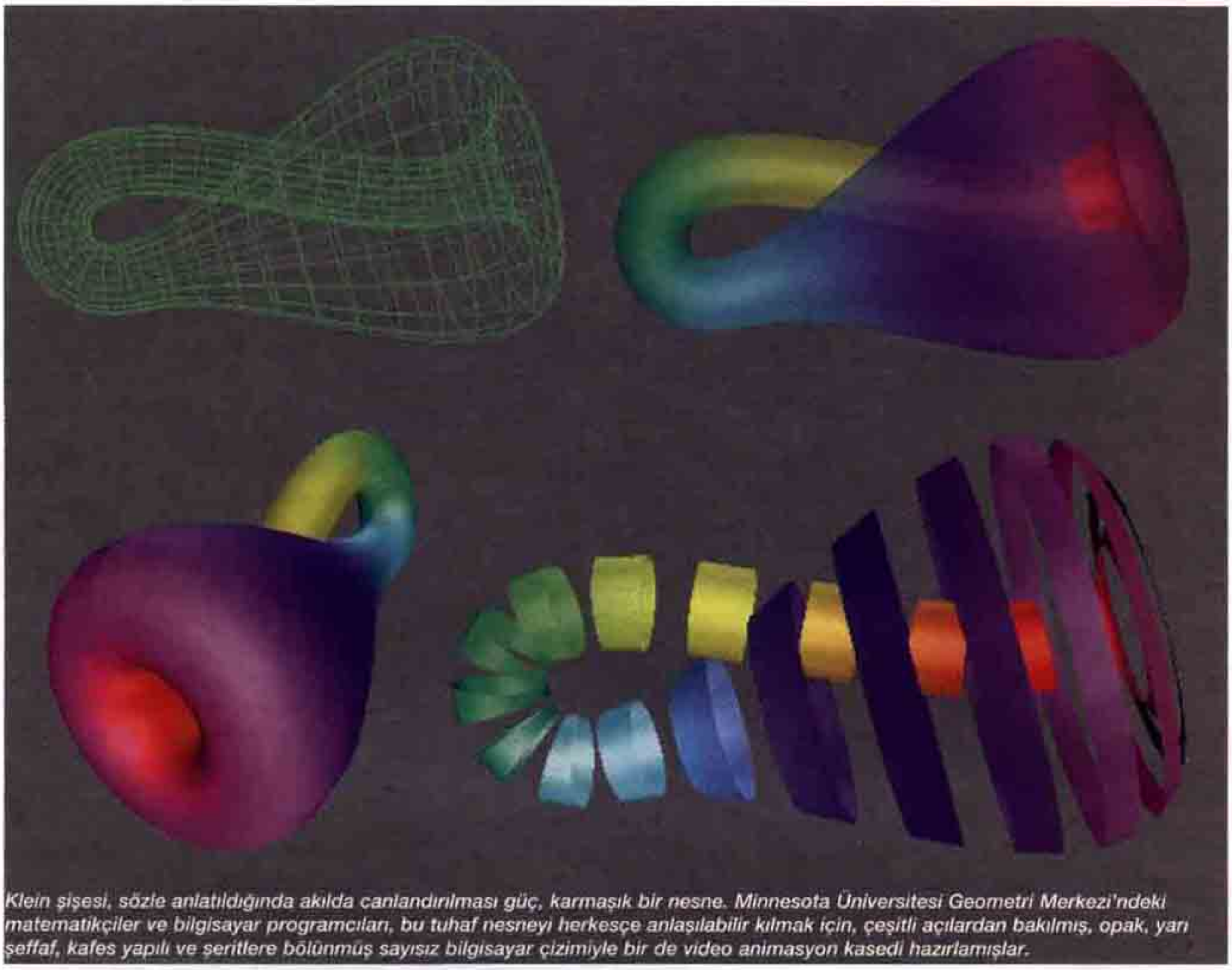
Felix Christian Klein, 25 Nisan 1849'da şimdi Almanya, o zamanlar Prusya sınırlarına dahil olan Düsseldorf'ta doğmuş ve hayata gözlerini 22 Haziran 1925'de, Almanya'nın Göttingen kentinde kapamış. Klein, doktorasını 1868 yılında, yıllar boyu matematik ve fizik alanlarında çalışma yaptığı Bonn Üniversitesi'nden almış. Çeşitli üniversitelerde öğretim görevlisi olarak çalışmalarda bulunduktan sonra 1886'da kürsü başkanlığına kadar yükseldiği Göttingen Üniversitesi'ndeki çalışmalarını ölümüne kadar sürdürmüş.

Klein'ın Göttingen Üniversitesi'nde yerleştirdiği araştırma gelenekleri, izleyen yıllarda, önde gelen matematiksel araştırma merkezleri için model oluşturmuş. Haftalık matematiksel tartışma etkinlikleri düzenleyen Klein, sadece matematik alanındaki kitaplarla donatılmış bir kitaplığa sahip, "matematik okuma odası" da kurmuş. Klein, ünlü matematikçi Hilbert'i de, Göttingen'deki araştırma grubuna davet etmiş. Ünlü Mathematische Annalen dergisinin namı, biraz da, Klein'ın matematik ve yönetim konusundaki becerisinin bir ürünü. Klein'ın bir araya getirdiği editörler grubu sıkça toplanmayı ve kararları demokratik yöntemlerle almayı gelenek haline getirmiş. Klein'ın kendisini ünlü eden çalışmaları, Öklid-dışı geometri alanında yaptığı, geometri ile grup kuramı arasındaki bağlantıları kuran ve fonksiyonlar kuramı alanında meyveler sunan araştırmaları olmuş.

Tuhaf Bir Şişe

Klein'ın popüler matematik gözlüğüyle bakıldığında en önemli çalışması ünlü "Klein şişesi". Az bir çabayla bir cam atölyesinde üretimi gerçekleştirilebilecek olsa da, günlük yaşamda bir işlev üstlenemeyecek olan Klein şişesi, artistik bir biblo olmanın ötesinde ciddi bir matematiksel değer taşıyor. Klein şişesi herşeyden önce "topolojik" bir nesne. Topoloji, geometrik şekillerin biçimleri ve boyutlarından çok, birbirleriyle ilişkileri, bükme, germe, gibi şekil deformasyonlarından sonra da taşıdığı değişmez özellikleriyle ilgilenen matematik dalı. Söz geli-





Klein şişesi, sözle anlatıldığında akılda canlandırılması güç, karmaşık bir nesne. Minnesota Üniversitesi Geometri Merkezi'ndeki matematikçiler ve bilgisayar programcıları, bu tuhaf nesneyi herkesçe anlaşılabilir kılmak için, çeşitli açılardan bakılmış, opak, yarı şeffaf, kafes yapılı ve şeritlere bölünmüş sayısız bilgisayar çizimiyle bir de video animasyon kasedi hazırlamışlar.

mi, kare biçiminde kesilen bir yüzey yırtmadan, delmeden ve yapıştırmadan büküldüğü, esnetilip uzatıldığı, ortası şişirildiğinde bile, topolojik anlamda değişmez olan özelliklerini korumaktadır.

Son yıllarda bilgisayarda gösterişli geometrik modelleme yöntemlerini de sömüren matematikçiler, cisimleri çekiştirip ters-yüz ederek topolojik çalışmalar yapıyorlar. Topolojiyle uğraşanların en gözde geometrik nesnelerinden biri, belki de Klein şişesinden daha da popüler olanı, Moebius şeridi. Adını 1790-1868 yılları arasında yaşayan ünlü matematikçi A. F. Moebius'dan alan bu şerit, biraz da M.C. Escher'in oldukça popüler çizimleri sayesinde epey ünlenmiş. Bir parça kağıt, yapıştırıcı ve makas kullanarak üzerinde eğlenceli deneylere girişebileceğiniz Moebius şeridi, pek çok özelliğiyle, Klein şişesinin yakın akrabası olduğunu kanıtlıyor. 20 cm civarında uzunluğa ve 3-4 cm genişliğe sahip bir kağıt parçasının iki ucunu 180 derece çevirdikten sonra birbirine yapıştırarak bir Moebius şeridi elde edebilirsiniz. Sözgelimi, şeridin bir yüzü kırmızı, diğer yüzü yeşil olsa idi, birleşme noktasında farklı renkler uç uca gelmiş olacaktı. Moebius şeridinin, Klein şişesiyle de ortak, en önemli özelliği, tek bir yüzü oluşu. Escher'e de ilham veren taktiği kullanarak, bir karınca olduğunuzu ve Moebius şeridi üzerinde yürüdüğünüzü düşünün. Belli bir doğrultuda yürümeyi sürdürecek olursanız, eninde sonunda şeridin her iki yüzünü de (aslında tek) dolaşmış olursunuz. Moebius şeridini orta ekseninden boylamasına keserseniz, bu tuhaf özelliği yüzünden, iki tane değil, tek, dolanmış bir halka elde edersiniz. Moebius şeridiyle oynamaya, yapıştırmadan önce 180 derece değil, 360 derece çevirerek veya orta eksen yerine kenara yakın kesmeye kalkışarak devam edebilirsiniz. 360 derece çevirdiğinizde, yani aynı renkteki yüzeyleri çakıştırarak kestiğinizde sizi bir sürpriz bekliyor...

Klein şişesi de, Moebius şeridinin tuhaf özelliklerini taşıyan, tam anlamıyla 3 boyutlu bir geometrik nesne. Çoğu şişenin bir iç bir de dış kısmı tanımlanabilirken, Klein şişesinin tek bir yüzü var; yani içi-dışı yönleri biraz tartışmalı. Bu tuhaf şişenin hilesi, yüzeyinin kendisiyle kesişiyor oluşu. Kesişim büyüyü biraz bozuyorsa da, 3 boyutlu bir cisimde önlenemeyen, ancak 4 boyutta tanımlandığında çözülebilen bir süreksizlik problemi bu. Klein şişesinin, kendi gövdesini delip "içine" giren, oradan da "dibine" açılan bir boynu var. Analitik geometriyle arası iyi olanlar için parametrik denklemleri şöyle verilebilir: v ve u 0 ile 2π arasında değişen parametreler olsun.

$r = 4(1-\cos(u)/2)$ ise,

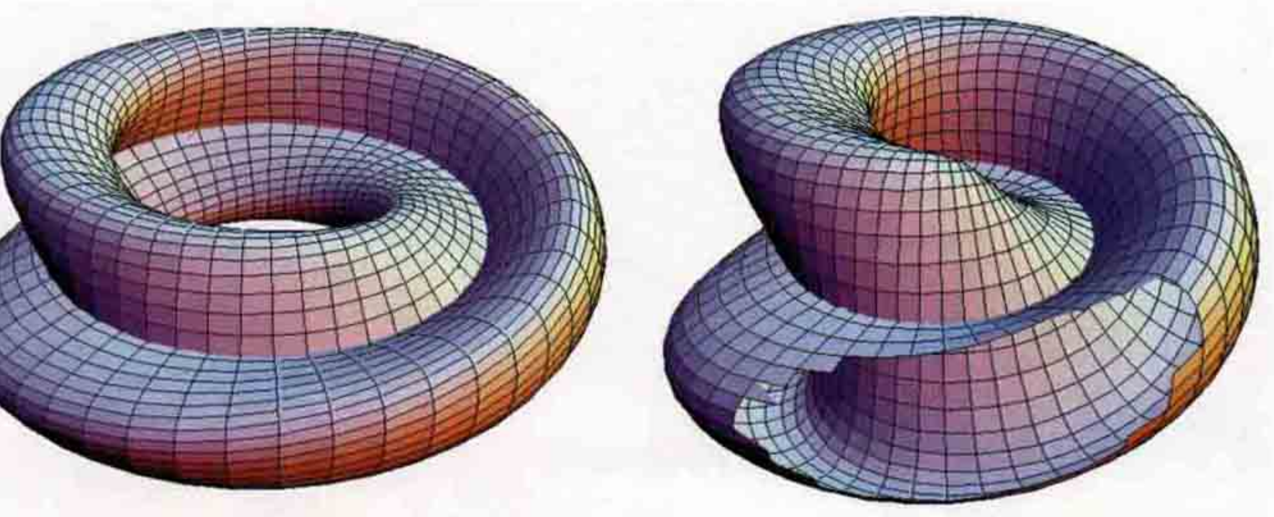
$$x = \begin{cases} 6\cos(u)(1+\sin(u)) + r\cos(u)\cos(v) & 0 \le u < \pi \\ 6\cos(u)(1+\sin(u)) + r\cos(v+\pi) & \pi < u \le 2\pi \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 16\sin(u) + r\sin(u)\cos(v) & 0 \le u < \pi \\ 16\sin(u) & \pi < u \le 2\pi \end{cases}$$

$$z = r\sin(v)$$

Klein şişesinin, kenarlarından birbirine tutturulmuş iki Moebius şeridinden üretilmiş farklı bir uyarlaması daha var. Figür-8 adı verilen bu tip Klein şişesinin parametrik denklemleri aşağıdaki gibi verilebilir:

$$-\pi \le u \le \pi$$
$$-\pi \le v \le \pi$$
$$x = \cos(u)(a+\sin(v)\cos(u/2) - \sin(2v)\sin(u/2)/2)$$
$$y = \sin(u)(a+\sin(v)\cos(u/2) - \sin(2v)\sin(u/2)/2)$$
$$z = \sin(u/2)\sin(v) + \cos(u/2)\sin(2v)/2$$



Klein şişesinin Figür-8 çeşitlemesinin bir matematiksel modelleme programı yardımıyla elde edilmiş iki görüntüsü. Bu yazıda verilen parametrik denklemlerdeki a sabitine 2 değeri verildiğinde soldaki, 1 değeri verildiğinde sağdaki şekil elde ediliyor. Sağdaki şekilde ayrıca, geometrik nesnenin iç yüzünü de sergilemek amacıyla yüzeyin bir kısmı çıkarılmış.

Topolojik Eğlence

Klein şişesinin tuhaf özellikleri sayısız topoloji problemine olduğu kadar, sanat yapıtlarına, bulmacalara, oyunlara hatta şiirlere ilham kaynağı olmuş. .Bilgisayarda matematiksel geometrik modelleme merkezlerinin önde gelenlerinden Minnesota Üniversitesi'ndeki Geometri Merkezi'nin İnternet sayfalarında, Klein şişesine ait sayısız resim, animasyon ve açıklamanın yanı sıra, bir de satranç programı bulmak olası. Kenarı olmayan bir satranç tahtasına dönüştürülebilen, taşların birbirinin zıt tarafında, bir yüzeyin farklı (tuhaf ama aslında aynı) yüzlerinde üst üste durabildikleri satranç oyunu ilginç bir deneyim. Klein şişesini kendine eğlence edinenlerden bir başkası, "bilimsel cam şişirici" Alan Bennet. Klein şişesinin çeşitlemelerini laboratuvar malzemesi görünümünde cam kaplar üzerinde deneyen Bennett, 18 ay süren deneme yanılma sürecinden sonra, 11 bükülme noktası ve 5 tam tur içeren, kenarsız, dolayısıyla da tek yüzlü bir şişe yapabilmiş. Bennett, "Ben bir bilim adamı değilim, bilimsel bir cam şişiriciyim. Yapıtlarımı bilimsel önermelerle açıklayamam. Benim uğraştığım ve birşeyler başarabildiğim; tasarım problemleri yaratmak ve deneyerek çözmek" diyor.

Figür-8 çeşitlemesinin çeşitli açılardan bakılarak oluşturulmuş görüntüleri. Son görüntüde bir parçanın ayrılmış olması, 8 biçimindeki kesiti ortaya çıkarıyor.

Herkesin evde deneylere gireşebileceği bir Klein şişesi çeşitlemelerinden biri, yünden örülmüş bir bere olabilir. Dünya üzerinde Klein şişesi biçiminde örülmüş berelerin sayısız meraklısı var. Berenizin iç ve dış kısımlarını (bundan ne anlıyorsanız) farklı renklerde, örüp, ters-yüz ederek ilginç sonuçlar elde edebilirsiniz. Yanına bir de Moebius şeridi biçiminde atkı ekleyecek olursanız topolojik bir kışlık takımınız olur. Eldiven ile neler yapılabileceğini ise size bırakıyoruz...

Muzip matematik öğrencilerinin, matematik ödevlerini yapmamış oluşlarını açıklamak için uydurup, İnternet üzerinden yaydıkları bahaneler arasından bazı seçmeler: "Yanlışlıkla bir tam sayıyı sıfıra böldüm ve ödev kağıtlarım alev aldı; kitabıma asimptotik olarak yaklaşabiliyor ama dokunamıyordum, ödevimi çekmeceye kilitledim ama dört boyutlu bir köpek gelip onu yedi; ödevimi bir Klein şişesinin 'içine' koyduğuma yemin edebilirim, ama sabah kalktığımda orada değildi". Bir başka matematik öğrencisi Lauren Weinstein'ın bir özdeyişi Klein şişesinin tüm matematiksel, edebi ve mizahi ilhamını iyi bir şekilde özetliyor: "Bir Rubik Küresi edindiğimde onu nereye koyacağımı biliyorum: Klein şişesinin 'içine'."

Özgür Kurtuluş

Kaynaklar:
www.geom.umn.edu/zoo/toptype/klein/
www.mhri.edu.au/rupdir/geometry/klein.html
www.mathematica.com/posters/quintic/people/klein.html