Muammer Abalı

Öklit

Gül Yaprağı

Geçen sayımızda Matemanya'yı okumuş olanlar hatırlayacaktır: Bindirilmiş pi sayısı kıtalarının nasıl rüyama girdiğini, üstüme üstüme yürüyüp hizmet etmeyi nasıl reddettiklerini, bir soba borusunun iki ucunu bir türlü nasıl denkleştiremediğimi yana yakıla anlatmıştım size.

Sağ olsunlar, yazıyı okumuş matematik meraklılarından birkaçı, elektronik ileti göndererek görüşlerini ve eleştirilerini ulaştırdılar. "Gerçekten de sıkıntılı bir durummuş" diyenlerin yanında, durumla dalga geçen meslektaşlarım da var. Hele bir tanesi, doğrusunu isterseniz beni allak bullak etti.

"Ben yaşlı bir matematik öğretmeniyim" diye başlayan ileti, matematiğe duyduğu tutku ve gönül bağına işaret ettikten sonra, aniden darbeyi vuruyor: "Canım siz de pi sayısını çok şımartıyorsunuz sürekli; ne o öyle, pi sayısının korku imparatorluğu sanki."

Meslektaşıma, "Hocam ben de yaşını başını almış bir matematikçiyim" demeyi beceremedim. Biraz çekindim açıkçası. Hele "nereden biliyorsunuz evrenin bir başka köşesinde çevrenin çapa oranının nasıl bir şekil alacağını?" deyince, boğazım düğümlendi.

Cahit Arf hocam olsa "sana verdiğimiz emeğe, çürüttüğün dirseğe üzülüyorum" filan gibi sevgi sözcükleri sarf eder, beni mutlu ederdi ama, "yaşını başını almış" meslektaşımın söylediklerini yutamadım.

Bakın ne demiş oluyor: Evet, her ne kadar pi sayısı bizim içinde at koşturmaya alıştığımız uzayda kendini güçlü zannedip kasım kasım kasılıyorsa da, acaba ne tür bir şekli olduğunu bilmediğimiz evrenin başka yerlerinde durum aynı mıdır.

Bu tür sarsıcı sözleri severim ben. Bu, çözümlenmemiş matematik problemleriyle, kendimi eskitme takıntılarım yüzünden, bazı arkadaşlarımın zoruyla psikoloğa bile gitmiştim geçmişte. Doktor "takıntılarınızdan zarar gelmez, bakmayın siz arkadaşlarınıza; hayırlı takılmalar" deyip beni başından savmıştı. Ben de o gün bugündür, hayırlı hayırsız "takılıyorum" sizin anlayacağınız. Meslektaşımın bu sözleri üzerine hemen bir sürü "takıntı" daha icat ettim: Evrenin her yerinde üçgenin iç açıları toplamı 180 derece midir, acaba Pisagor bağıntısı her yerde geçerli midir, acaba her yerde paralel doğrular var mıdır gibi, arızalı düşünceler.

Akla sıkıntı veren bu soruları ilk soran ben değilim tahmin edeceğiniz gibi. Dünyaya biraz geç gelmiş olmamdan ziyade, matematik yeteneğimin yere yakınlığından olsa gerek, zaten hiçbir soruyu ilk soran ben olamamışımdır. Yaşlı meslektaşımın yaprağının hangi gülden koparılıp atıldığını anlamaz değilim gerçi: Öklit'in beş aksiyomudur bizim hâlâ keyifli geometri oyunları oynadığımız sistemin temeli. Bu temel ise, birçok aklı karıştırmaya hâlâ devam ediyor.

Şimdi izin verirseniz önce Öklit geometrisinin temelindeki beş aksiyomu, günümüz diline getirilmiş haliyle bir yazayım size:

Birinci aksiyom, iki noktadan sadece bir tek doğrunun geçeceğini söylüyor. İçinizden "Doğru dediğin de ne ki" diyenler çıkacağı için, hemen onu da belirtelim: Verilen iki nokta arasındaki en kısa mesafe bir doğrudur. Uzunluk konusuna girmeyeyim isterseniz, çünkü uzunlukları kıyaslamak ve en kısasını bulmak aşikâr değil mi?

İkinci aksiyom, her düz doğrunun iki yönde de sonsuza kadar uzatılabileceğini söylüyor. Birçoğunuz, daha önceki yazılarımızda, evrende sonsuz herhangi bir şeyin olmadığını defalarca dile getirdiğimi bilirler. O halde ne demektir şimdi bir doğruyu sonsuza kadar uzatmak değil mi? Yani bir doğruyu uzatıp sonsuza kadar gidemeyeceğimiz aşikârken, bu denli uzattığımızda hâlâ doğru olmaya devam edeceğini nereden bileceğiz ki? Bu haklı bir soru olmakla beraber, "her yöne sınırsız" uzanan bir boş düzlemi hayal ederseniz, Öklit'in meramını anlamak ve kabullenmek daha kolay olacaktır.

Üçüncü aksiyom, herhangi bir noktadan, verilen herhangi bir yarıçapta çemberin çizilebileceğini ileri sürüyor. Bu üçüncü aksiyom bizim için kritik. Öklit diyor ki, uzayın neresine giderseniz gidin, uzayın özelliği hiç değişmez. Yani çemberin uzunluğunun çapa oranı hep aynıdır. Yaşlı meslektaşımın bana attığı gül yaprağı işte buradan geliyor apaçık. Gerçi, Adana'daki çemberler ile Zonguldak'taki çemberler arasında bir fark yok ama, evrenin bilinmeyen yerlerinde doğru mu bu acaba? Gene de İskenderiyeli Öklit'e, Ankaralı bir hayranı olarak "haklısın" diyelim şimdilik. Pek de yanlış görünmüyor.

Dördüncü aksiyom bütün dik açıların birbirine eşit olduğunu söylüyor. Dik açı ise geometrik olarak şöyle açıklanıyor: İki doğru kesiştiğinde ortaya çıkan dört açı birbirine eşitse, bu açılara dik açı diyoruz. Gene dikkat edelim, bu iki doğru uzayın neresinde kesişirse kesişsin, durum değişmiyor.

Şimdi, Öklit'ten günümüze, matematikçileri en çok sıkıntıya sokmuş olan aksiyoma geliyoruz; Öklit'in beşinci ya da paralellik aksiyomu. Beşinci aksiyomun Öklit'in *Elemanlar* kitabındaki ifadesi biraz karışık, ama gene de oradan aktarayım: **Eğer bir düzlem içindeki iki doğru, üçüncü bir doğru tarafından kesilir ise ve eğer bir taraftaki iç açıların toplamı iki dik açıdan küçük ise, o zaman bu doğrular, iç açıların iki dik açıdan küçük olduğu tarafa yeterince uzatılırsa, birbirlerini mutlaka keserler.** Karışık göründüyse sorumlusu benim anlatma yetersizliğim. Ama şöyle de anlayabilirsiniz: Eğer söz konusu iç açıların toplamı iki dik açıya eşitse, bu iki doğru, ne kadar uzatırsanız uzatın, kesişmezler. Okullarda, bu aksiyom, İskoçyalı matematikçi John Playfair (1748-1819) tarafından basitleştirilmiş haliyle okutulur: **Verilen bir doğruya, verilen bir noktadan ancak bir tek paralel doğru çizilebilir.**

Bu beşinci aksiyom, iki türden sorun çıkarmış matematikçilere: Birçok matematikçi, beşinci aksiyomun gerekliliği konusunda şüpheye düşmüşler. İlk dört aksiyomdan beşinci aksiyomun türetilebileceği ya da ispatlanabileceği umuduyla epey emek sarf etmişler. Şaşıracağınız birçok ünlü isim bu uğurda uykusuz geceler geçirmiş gibi gözüküyor. Hatta, *Elemanlar* kitabının yayımlanmasından beri geçen 2000 yılı aşkın zaman içinde, matematikçiler ilk dört aksiyom ile beşinci aksiyomun ispatlandığını kabul ettikleri bir yanlış ispatı, birkaç yüzyıl boyunca doğru saymışlar. MS 410-485 yılları arasında yaşamış olan Eski Yunanlı Proklos, *Elemanlar* kitabı üzerine yazdığı bir incelemesinde Batlamyus'un yanlış bir ispat yaptığı üzerinde durup kendi ispatını vermektedir. Ama ne yazık ki onun ispatı da yanlıştır. İslam matematikçileri de bu konuyla uğraşmışlar: İbn al Haytam (965-1039), Ömer Hayyam (1050-1123), Nasrettin El Tusi (1201-1274) hemen akla gelen isimler. Bu noktada biraz erken olacak ama gene de çıtlatayım: Hayyam ve Tusi, Öklit dışı geometrinin ilk örneklerini vermişler matematik tarihine.

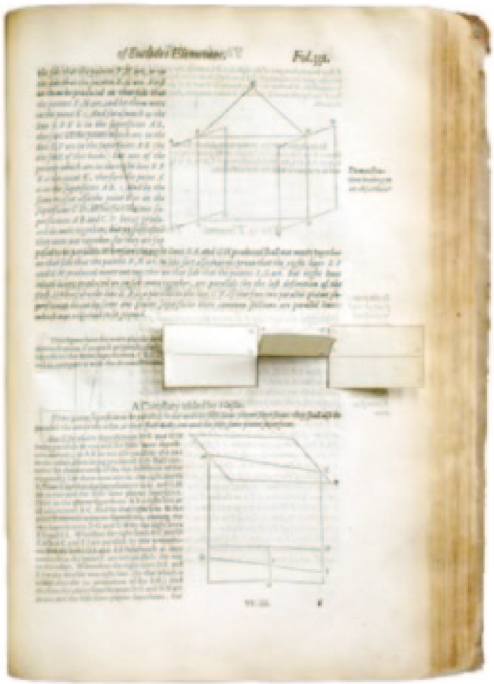
Anlatıldığına göre, ünlü Fransız matematikçi Joseph Louis Lagrange (1736-1813), ilk dört aksiyomu kullanarak, bir üçgenin iç açılarının toplamının iki dik açıya eşit olduğunu ispatladığına inanır. Hatırlatayım, böyle bir ispat, beşinci aksiyomun gerekli olmadığı anlamına gelmektedir. Fransız Bilimler Akademisi'nde bir konferansta bu ispatını sunarken, toplantının ortasında birden durmuş, "bunu yeniden düşünmem gerekiyor" diyerek salonu terk etmiş.

Bütün bu çabalara rağmen, nihayet 1868 yılında, beşinci aksiyomun önceki dört aksiyomdan çıkarsanamayacağı ispatlanmış. Ne var ki, tersi çabalar 20. yüzyılın önemli bir bölümünü kaplamaya devam etmiş. Ama bütün bunlar, Öklit'in sonsuz düzleminde.

İkinci sorun ise şöyle: Öklit'in kabul ettiği gibi bir sonsuz evren yok. Her yöne sonsuza kadar uzanan doğrular, asla kesişmeyen paralel doğrular ancak varsayımsal olarak var. Gerçekte, yeryüzünde çizdiğimiz her şey, bir kürenin kabuğuna çiziliyor. O nedenle, Öklit'in tasavvur ettiği sonsuz düzlem yerine sınırsız ama sonlu bir küre yüzeyinden ya da zaman boyutu üzerine bükülmüş bir üç boyutlu, şeklinin ne olduğundan tam da emin olamadığımız bir uzaydan söz edebiliriz aslında. Öyle olunca da işler karışıyor.

Birkaç örnek vereyim size: Elinize plastik bir top ve bir de kalem alın ve topun yüzeyine birbirini kesmeyen iki doğru (doğru dediğime dikkat edin) çizmeyi deneyin. Aklınıza hemen paraleller gelmesin, zira onlar eğridirler... Topun yüzeyine iki nokta işaretleyin ve bunlar arasındaki en kısa çizgiyi oluşturun. Sonra da bu doğrunun üstünde olmayan bir nokta seçip buradan geçen bir paralel doğru çizmeyi deneyin. Bakın bakalım bu olası mı? Ya da topun üzerinde bir nokta seçin, bu noktadan eşit uzaklıktaki noktaları birleştirerek bir çember çizin. Bakın bakalım, çemberin uzunluğunun çapa oranı pi çıkacak mı? Ya da topun yüzeyine bir üçgen çizin, bakın bakalım iç açıların toplamı 180 derece mi? Hatta bir dik üçgen çizin, bakın bakalım Pisagor bağıntısı hâlâ geçerli mi?

Beşinci aksiyomu ispatlamak için yola çıkan birçok ünlü matematikçi arasında Gauss da var örneğin. İşe, bir doğruya, üzerinde olmayan bir noktadan tek bir paralel çizilmesin de, birden fazla paralel çizilebilsin diye başlayıp, yepyeni bir geometri kurgusuna varmış. Vardığı sonuçları önemli bulmamış olmalı ki, yayımlamayı gerekli görmemiş. Kendisinden çok kısa bir zaman sonra, hemen hemen aynı şekilde yola çıkmış olan Rus matematikçi Nikolay Lobaçevski (1793-1859) ve Macar matematikçi Janos Bolyai (1802-1860), 1830'ların başlarında kuramlarını yayımlayarak, kendilerinden 700-800 yıl önce Ömer Hayam'ın, El Tusi'nin başlatmış olduğu yolculuğu taçlandırmışlar.



Kolay işler değil bunlar. Meslektaşlarınız size "kafayı yemiş" gözüyle bakabilirler. Hatta çok yakınınız insanlar, bu uğraşılarınızdan elem duyabilirler. Bolyai'nin babası oğluna yalvarıyor: "Tanrı aşkına onlar seni sağlığından, huzurundan ve mutluluğundan yoksun bırakmadan önce, sen bu düşünceleri bırak." Benim doktorum ne kadar açık görüşlüymüş değil mi!

Bir iki cümlecik daha bu ilginç konuda: Başka bir Alman, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), 1856 yılında, iki boyutlu küresel bir yüzey üzerine Öklit dışı geometri kuramını, günümüzde Riemann geometrisi diye adlandırılan kuramı, yayımladı. Matematik dünyası tarafından heyecanla karşılanan bu kuramın gördüğü genel kabulü bilseydi, sanırım Bolyai'nin babası, oğluna haksızlık yaptığını düşünürdü.

Sevgiyle anıyorum Öklit'in beşinci aksiyomuna ter dökmüş tüm matematik ustalarını.