Zekâ Oyunları

Selçuk Alsan

Kovalar

Elimizde her biri tam sayı litre su alan 3 kova var. 1. kova 2. kovanın 2/3'ü ve 3. kovanın 3/4'ü kadar su alıyor. 30 litrelik bir fıçıya 1., 2. ve 3. kovayı boşaltıyoruz. Fıçı hâlâ dolmamış. Acaba kaç litre daha su istiyor?

Yansıma

Kendi hayalinizi gördüğünüz büyük bir aynanın karşısında ayakta dururken elinizdeki küçük ayna ile bir güneş ışını yakalıyorsunuz. Bu ışını küçük aynanın, büyük aynadaki hayaline doğrultursanız ne görürsünüz?

Çokgenlerin Çizim Şartı

n kenarlı düzgün bir çokgenin sadece pergel ve cetvel yardımıyla çizilebilir olmasının şartı nedir?

Bir Modül Hesabı

$1835^{1910}+1986^{2061}$, 7'ye kalansız bölünür mü?

Çevrel ve İçteğet Çember

Bir üçgende çevrel çemberin yarıçapı R ve içteğet çemberin yarıçapı r ise şu ifadeleri kanıtlayın:

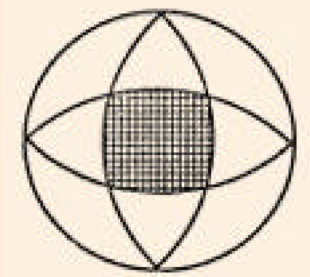
$R=abc/4S$, $r= 2S/a+b+c$

(S= üçgenin alanı)

Zorun Kolayı

Boş kartlar üzerine 1'den başlayarak 1,2,3,4,5,... gibi pozitif tam sayılar yazılıyor ve kartlar en üstte 1'den başlayarak alta doğru sıraya konuyor. 1. kişi 1, 2. kişi 3, 3. kişi 5, 4. kişi 7, 5. kişi 9, ..., n. kişi ($2n$-1) kart alıyor. Herkes kendi kartlarındaki sayıları topluyor; buna göre S_1=1, S_2 = 2 + 3 + 4 = 9 , S_3=5+6+7+8+9=35, S_4= 10+11+...+16=91... oluyor. Son kartı alanın elindeki sayıların toplamı 999^3+1000^3 ise son kartı alan kaçıncı kişidir?

Geometri Çiçeği



1 yarıçaplı dairenin ortasındaki taralı alanı bulunuz. (Yayların merkezi dairenin çevresi üzerinde veya değil. Yayların yarıçapı R ve taralı alan içindeki eğri kenarlı karenin düz kenarı $2q$ biliniyor.)

Küp İçinde Küp

Cin Ruhi'nin başı nedense uzaya her gidişte belaya giriyordu. Uzaylılar genellikle ileri bir uygarlık kurduklarından ve uygarlık matematiğe dayandığından gelen yabancıları matematikten sınava sokuyor, başaramayanlara ceza, başaranlara ödül veriyorlardı. Cin Ruhi Kafaboş'la tatilini geçirmeye Küpküpos yıldızına gitmişti. Yıldıza iner inmez iki küp biçimi uzaylı kollarına yapıştılar ve hemen kolay bir soru sordular: "0! kaça eşittir?". Kafaboş hemen "sıfır" diye bağırdı. Cin Ruhi'nin "bir" diye bağırması para etmedi. Onları yaka paça Büyük Küp'ün yanına götürdüler. Büyük Küp reis onlara şöyle dedi: "Kenar uzunluğu 13 km olan küp biçimi bir hacim içinde rastgele 1997 noktaya öldürücü yüksek gerilim koyduk. Bunlar mavi mavi parlıyor. Siz kenarı 1 km olan küp biçimi bir araçla büyük küp içinde serbestçe uçabileceksiniz. Ya bu küpe binersiniz, ya da sizi küp şekline sokup Dünya'ya öyle göndeririz". Kafaboş "hiç olmazsa bizi küre yapın, yuvarlanmak daha kolay ol.." diyecekti ama Cin Ruhi ayağına öyle bir bastı ki sesi kesildi. Siz olsanız hangi alternatifi seçerdiniz? (Kenarı 1 km olan küpünüzü yüksek voltaj noktalarına değmeden gezdirebilir misiniz?)

Turnuva Matematiği

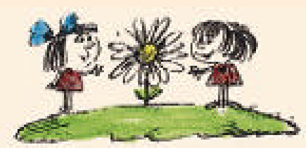
a) N takımlı bir turnuvada yenilen takım elimine edilirse şampiyonu belirlemek için kaç maç oynanmalıdır?

b) 68 takımlı bir turnuvada, iki kez yenilen takım elimine ediliyorsa, şampiyonu belirlemek için kaç maç gereklidir?

Aynı soru N takım için.

c) N takımlı bir turnuvada M yenilgi alan elimine ediliyorsa şampiyonu belirlemek için kaç maç gereklidir?

Papatya



İki kız öğrenci papatya çiçeğiyle şöyle bir oyun oynuyorlar: A ya bir tek, ya da komşu iki papatya taç yaprağı (beyaz) koparıyor. B de ya bir, ya da komşu iki taç yaprak koparıyor. Son taç yaprağını koparan oyunu kazanıyor. 2. oyuncunun isterse oyunu daima kazanabileceğini gösteriniz.

Yuvarlak Masada Yedi Şövalye

Yedi şövalye (Adams, Brooks, Cater, Dobson, Edwards, Fry ve Green) 15 gün kalmak üzere kasabanın hanına geldiler. Kahvaltıda yuvarlak bir masanın etrafında oturuyor ve bir gün önceki düellolarını konuşuyorlardı. Herkes birbirini daha iyi tanısın diye bir karar alındı: Hiç bir şövalye hiç bir gün aynı iki şövalye arasında oturmayacaktı. Hancı 15 gün sürecek böyle bir plan yapamadı; bir de siz dener misiniz?

1800-1914

1800 ile 1914 arası 5 büyük matematikçi kimlerdi?

Hancının Birası

Handa en iyi cinsten İngiliz siyah birası vardı. Handa şövalyeler bira içerek şakalaşıyorlardı. Birden hancı şöyle dedi: "Soylu şövalyeler! Cesaretiniz kadar aklınızın da olduğundan eminim. Elime bir 3 litrelik, bir de 5 litrelik bira bardağı aldım. Şurada da bir fıçı bira duruyor. Her kim ki bana 3 litrelik bardak içinde 1 litre ve 5 litrelik bardak içinde 1 litre bira getirir, ona bu bir fıçı birayı bağışlayacağım." Şövalyeler kızardı, bozardı, hiçbiri söyleneni yapamadı. O sırada içeri yorgun yüzlü bir şövalye girdi ve kendini takdim etti: "Don Ruhişot". Söylemeye gerek yok ki Don Ruhişot istenileni yaptı; problemi çözdü. Acaba nasıl?

Bir Açılım

$f(x)=x^3-2x^2+3x+5$ çokterimlisini (x-2) nin kuvvetlerine göre yazınız.

Enlemler

Çevresi ekvatorun 1/2'si ve 1/4'ü kadar olan enlemler hangi enlemlerdir?

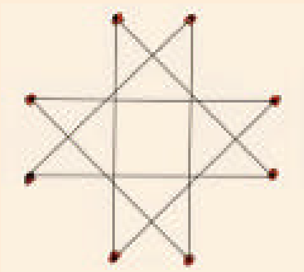
Sanço Pança'nun Zekâsı

Don Kişot'u okuyanlarınız Sanço Pança'yı bilirler; kahraman ve hayalperest şövalyenin basit ve gerçekçi uşağı. Ama bu romanda onun zekasını gösteren bir bölüm var. Onu bilmece olarak sunuyoruz. Sanço Pança gönlünü eğlendirmek isteyen bir dük tarafından bir adaya vali olarak atanır. Davâlara da bakması gerekmektedir. İki adam gelir: Alfonso ve Sergio diyelim. Sergio şöyle der. "Alfonso'ya 10 yıl önce 25 altın ödünç verdim. Bana geri vermedi." Alfonso ise bunu inkâr eder. Alfonso çok dindar bir katoliktir. İki adam da yaşlanmıştır ve Alfonso bastona dayanarak yürümektedir. Sanço, İncil'i getirtip üstüne el basarak yemin etmelerini ister. Alfonso bastonunu Sergio'ya vererek "şunu bir dakika tutuver ki ellerimi İncil'e basabileyim" der ve "bu adamın altınları bende değildir" diye yemin eder. Alfonso o kadar dinine bağlıdır ki herkes ona inanır. Fakat Sanço, kapıdan çıkmak üzere olan iki adama seslenir ve Alfonso'yu altınları gaspetmek suçundan hapse attırır. Onun suçlu olduğunu nasıl anlamıştır?

Cin Ruhi Toksikos Yıldızında

Cin Ruhi toksikoloji doktorasını tamamlamak üzere Toksikos yıldızına uçtu.Burada evrenin en usta zehircileri bulunuyordu. Cin Ruhi köpeği Ruh'a kemik şekline konmuş beyaz fosfor vermek isteyen bir Toksikos'lu ile fena tartıştı. Bunun üzerine onu Zehir Kralı'nın huzuruna çıkardılar; bu yaratığın gözleri siyanür, dudakları baldıran, burnu kaplanboğan (aconitine), elleri arsenik, dişleri kadmiyumdandı. Zehir Kralı, Ruhi'nin önüne içi gadolinyumlu volkan şarabı dolu 129 bardak dizdi. Sonra zehir gibi bir sesle şunu söyledi: "Bu bardaklardan birinde var bir zehir. 25 dakikada zehirli bardağı bulman gerekir. Zehir analizi alır 30 saniye; bir bardağı boşaltmak sürer 10 saniye. Ya bulursun zehiri, ya da yüzeriz derini diri diri". Bir gong çaldı ve zaman işlemeye başladı. Telkin sonucu mu nedir, Ruhi derisinin altında kıpır kıpır birşeyler dolaştığını hissediyor ve "operasyona şimdiden mi başladılar acaba" diye düşünüyordu. Siz olsanız ne yapardınız?

Sekiz Köşeli Yıldız

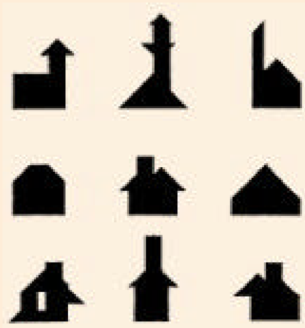


Elinizde 7 madeni para var. Oyun şu: kırmızı köşelerden herhangi birine bir para koyup onu bir doğru çizgi boyunca karşıki kırmızı köşeye kadar itin. Sonra yine boş kırmızı köşelerden birine bir para koyup onu bir doğru boyunca karşıki kırmızı köşeye itin vb. Bir plan yapmadığınız sürece 7 paranın hepsini 7 köşeye koymanın hemen hemen olanaksız olduğunu göreceksiniz. Nasıl bir plan gerekiyor?

Küre ve Koni

Taban yarıçapı R olan bir koni içine, konulabilecek en büyük küp konulmuştur. Küpün kenar uzunluğunu (a) bulunuz.

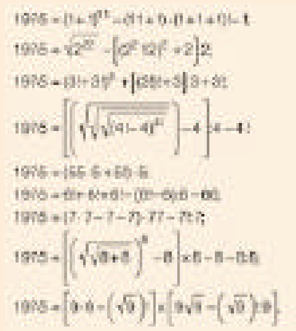
Tangram



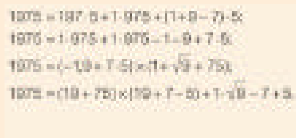
Beş Kardeş

1977 yılında Matematiksan ülkesinde beş erkek kardeş yaşıyordu: ikiz olan Sergey ve Alek ve yaş sırasıyla Andre, Stepan ve İvan. Sergey ile Alek'in yaşlarının çarpımı Andre'nin, Stepan ile Andre'nin yaşlarının çarpımı ise İvan'ın doğum yılını veriyor. Andre'nin, amcası ile adaş olan bir oğlu var. Oğlanın yaşı amcasının yaşının beşte biri ise oğlanın adı nedir?

Şiirsel Matematik



1975'in 1, 9, 7 ve 5 ile oluşturulması:



Bertrand Russel matematikte sanatlardaki güzelliği andıran bir güzellik, bir estetik olduğunu belirtmiştir

Cevizler

Kolya, Vitya ve Yuri'nin 12, 14 ve 22 cevizi var. Kimin ne kadar cevizi var, bilmiyoruz. Kolya Vitya'ya Vitya'nın elindeki ceviz kadar ceviz veriyor. Vitya Yuri'ye Yuri'nin elindeki ceviz kadar ceviz veriyor. Yuri Kolya'ya Kolya'nın elindeki ceviz kadar ceviz veriyor. Her üç çocuğun da ceviz sayısı eşitleşiyor. Her çocuğun kaç cevizi vardı?

Güzel Matematik

Matematiğin güzelliğine bir örnek: n, artı veya eksi bir tam sayı, x pozitif birtamsayı olsun. n sayılarını ardışık sayılar olarak alalım ve n^x'ler arasındaki farkları yazalım, buna D_1 diyelim. D_1 deki sayıların farkını yazalım, buna D_2 diyelim.

Böyle devam edelim. D^n'i verecek bir formül var mı? Bir örnek verelim, n= 1,2,3... ve x=3:

n	n^3	D_1	D_2	D_3
1	1	7		
2	8		12	
3	27	19		6
4	64	37	18	
5	125	61	24	6

D_3 de yalnız 6'lar var; n=5'den sonra ne kadar devam edersek edelim, D_3 sütunu hep 6 içerecektir. x belli iken D^n'yi veren formül nedir? (n^4,n^5.. ile deneyin).

100 Sandık

100 sandığın herbirinin içinde eşit sayıda tenis topu var. 1. sandıktan bir miktar top aldım; 2. sandıktan bunun 2 katı, 3. sandıktan bunun 3 katı, ... vb top aldım. Sonuncu sandıktan da toplar aldıktan sonra, bu sandıkta geriye 1 top kaldı. 100 sandıkta geriye kalan toplam top sayısı 14950 idi.

Başlangıçta her sandıkta kaç top vardı?

666

666 garip bir sayıdır.İşte 666'nın bazı gariplikleri:

$666=6+6^3+6+6^3+6+6^3$.

666=6+6+6+6(6x6+6x6+6x6)

=6+6+6+6x6(6+6+6)

$=6^4-6^3-6^3-6^3+6+6+6$

=6x6(6x6-6-6-6)+6+6+6.

666=123+543 ve 1+2+3=6 ve 5+4+3=6+6.

666, ilk 62 pozitif tamsayının toplamıdır:

36(1+36)/2=666.

$666=2^2+3^2+5^2+7^2+11^2+13^2+17^2$ (en küçük 7 asal sayının karelerinin toplamı).

Geçen Ayın Çözümleri

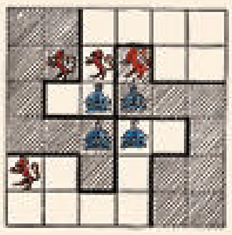
Japonesk

En sağdaki 0 olmalıdır. Diğer taraftan $i+1=k$, $k+i=10$ ve $k+1=t$ olduğu bellidir. Bunlardan t-i=2 bulunur. O halde t=8 olmalıdır; çünkü 2x8=16 ve 8 ile 6 arası fark 2. O zaman,

$k=t-1=7$. $i=t-2=6$ olur.

$$\begin{array}{r} 7680 \\ \underline{76080} \\ 83760 \end{array}$$

Aslanlar ve Taçlar



Bir Oylama Problemi

İlk oylamada evet sayısı e_1, hayır sayısı h_1; ikinci oylamada evet sayısı e_2, hayır sayısı h_2 olsun.e_1-h_1=h_1/4.(h_1+12)-(e_1-12)=1. İkinci denklemden e_1-h_1=23 bulunur. Buradan h_1=23x4=92 hesaplanır. h_2=92+12=104'dür. e_2 ise h_2'den 1 eksik olup 103 dür. O halde 104+103=207 işçi vardır. İlk oylamada 115 evet, 92 hayır, ikinci oylamada 103 evet, 104 hayır çıkmıştır.

Cinnoşla Minnoş

	Bugün	İleride
Cinnoş'un yaşı	x	3(26-x)
Minnoş'un yaşı	26-x	5x-3(26-x)

x-(26-x)=3(26-x)-[5x-3(26-x)] ve buradan x=14 ve 26-14=12.

Cinnoş 14, Minnoş 12 yaşında. Cinnoş 36 yaşına geldiği zaman Minnoş 34 yaşında olacak.

İnsanı Çarpan Çarpım

Basamaklarının toplamı 9 olduğundan bu sayı 9'a bölünür:

111 111 111=9x12 345 679.

Kırık Plaklar

Yarım plak tabii ki hediye edilemez. Fakat tek sayıların yarısı buçukludur ve bunlara buçuk eklenince tam sayı olur! Sonda 1 plak kaldığına göre daha önce 3 plak vardı Şahsene'ye (3/2)+0,5=2 plak verildi. Ondan önce de 7 plak vardı ve Solen'e (7/2) +0,5= 4 plak verilmişti. Formül:

$$x-\left(\frac{x}{2}+0{,}5\right)-\left[\frac{x-\left(\frac{x}{2}+0{,}5\right)}{2}+\frac{1}{2}\right]=1$$

Bu problemin değişik şekilleri olabilir: Cin Ruhi her keresinde plaklarının yarısını +0,5 plak verir, bunu 3 kere tekrarlar ve elinde plak kalmaz.Burada da başlangıçta Ruhi'nin yine 7 plağı vardır; sonuncu kez (1/2+0,5)=1 plak (sonuncu plak) verilmiştir. Şu da değişik bir şekli: her keresinde plaklarının 1/3'ünü ve 1/3 plak verir; iki devir sonra elinde 3 plak kalır; başlangıçta kaç plağı vardı? Benzer formülle yanıt 8 plak olarak bulunur. Bu son problem iki devir yerine üç devir şeklinde olsaydı çözülemezdi.

Buna benzer bir problem şudur: bir çocuğun akvaryumunda kılıçkuyruk balıkları var:1) Balıklarının yarısı+0,5 balık; 2) kalanların 1/3'ü+1/3 balık; 3) kalanların 1/4'ü+1/4 balık); 4) kalanların 1/5'i+1/5 balık satar. Elinde 11 balık kalır. Başlangıçta kaç balığı vardı? Yanıt: 59 balık.

Yıldızlı Bilmece

1789'dan itibaren x kere 10 yıl geçmiş olsun. A, B ve C'nin hızları sırasıyla b, c ve a olsun. Alınan yollar şöyledir: $AA'=xb$, $CA'=(x+1)b$, $CC'=xa$, $BC'=(x+1)a$, $BB'=xc$, $AB'=(x+1)c$. $A'B'C'$ üçgeninin alanı=1027 kere ABC'nin alanı. $A'B'C'$ alanı=ABC alanı+$BB'C'$ alanı+ $CC'A'$ alanı+ $AA'B'$ alanı=1027 ABC. Buradan; $BB'C'$ alanı+$CC'A'$ alanı+$AA'B'$ alanı= 1026 ABC. A, B ve C köşelerinde ABC üçgeninin iç açıları sırasıyla α, β, ve γ ise, bu köşelerdeki dış açılar sırasıyla (180-α) ve (180-β) (180-γ) olacaktır. Sinüs teoremine göre [S=1/2bc sin$A$] $BB'C'$ alanı=1/2sin(180-β) xc $(x+1)a$; $AA'B'$ alanı=1/2sin(180-α) $xb(x+1)c$; $CC'A'$ alanı=1/2sin(180-γ) xa $(x+1)b$; ABC alanı=

$$\frac{1/2(\sin\beta.ac+\sin\gamma.ab+\sin\alpha.bc)}{3}$$

$$\sin(180-\beta)=\sin\beta$$

sin(180-α)=sinα ve sin(180-γ)=sinγ olduğundan

$$1/2[\sin\beta.xc(x+1)a+\sin\alpha.xb(x+1)$$

$$c+\sin\gamma.xa(x+1)b]=$$

$$\frac{1/2[\sin\beta.ac+\sin\gamma.ab+\sin\alpha.bc]}{3}1026$$

Sol taraf $x(x+1)$ parantezine alınıp sadeleştirme yapılırsa $x(x+1)$=342 ve buradan x=18 bulunur. 18 kere 10 yıl geçmiştir. O halde bu son gözlem 1789+180=1969'da yapılmıştır. (Fransa Matematik Olimpiyatlarında sorulan ve yanıtı verilmemiş bu problemi çözmede bize yardımcı olan Atatürk Lisesi son sınıfından onur belgesi sahibi Metin Tabalu'ya teşekkürlerimizle.)

Poncelet Teoremi

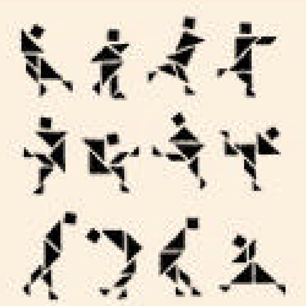
İçbükey çokgenin kapanıp kapanmayacağı önceden bilinemez.Fakat dış daire üzerinde alınan bir noktadan iç daireye teğet çizilmesiyle işe başlanıp buna devam edildiğinde, oluşan içbükey çokgen kendi üzerine kapanıyorsa, dış dairenin hangi noktasından teğet çizmeye başlarsak başlayalım, bu içbükey çokgen yine kapanacaktır. Çokgen kapanmak zorunda değildir; fakat kapanmıyorsa çizime hangi noktadan başlarsak başlayalım kapanmaz.

Steiner Teoremi

Bu ünlü Steiner teoremidir. Eğer çizdiğimiz "daire 1", daireler zincirini kapatıyorsa, "daire 1" yerine alacağınız herhangi bir başka daire de daireler zincirini daima kapatacaktır. "Daire 1" zinciri kapatamıyorsa, onun yerine alınacak herhangi bir diğer daire de zinciri kapatamayacaktır. Alınan bir dairenin zinciri kapatıp kapatmayacağı önceden bilinemez.

Çinliler

Koşan, yatan, düşen Çinliler.

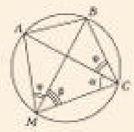


V. L. Black Teoremi

Zigzag çizginin kapanıp kapanmayacağını önceden bilemeyiz. Fakat zigzag çizgi kapanabiliyorsa, dış daire üzerinde hangi noktadan başladığımızın önemi yoktur; hangi noktadan başlarsak başlayalım zigzag çizgi kapanacaktır.

Daire İçi Dörtgen

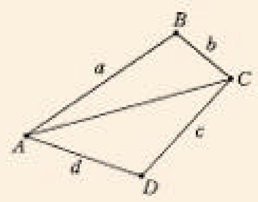
Sinüs teoremine göre:



$AC=2R\sin(\varphi+\beta)$
$BM=2R\sin(\alpha+\varphi)$
$AM=2R\sin\alpha$,
$BC=2R\sin\beta$,
$AB=2R\sin\varphi$.
$CM=2R\sin[\pi-(\alpha+\beta+\varphi)]=2R\sin(\alpha+\beta+\varphi)$.

$AC.BM=(AM.BC)+(AB.CM)$ demiştik. (1) Bu denklemde yukarıdaki eşitlikleri yerine koyalım: sin(φ+β). sin(α+φ)=sinα.sinβ+sinφ.sin(α+β+φ). Bu sonuncu ifade her α, β, φ açısı için doğrudur. O halde 1 denklemi de doğrudur.

Dörtgenin Alanı



$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ADC}\ S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin B.ab\le\frac{a^2+b^2}{2} \quad (1)$$

eşitsizliğinden $S_{ABC}\le\frac{a^2+b^2}{4}$

Benzer yolla $S_{ADC}\le\frac{c^2+d^2}{4}$ (2)

1 ve 2'den aranan yanıt elde edilir.

Karelerin Terslerinin Toplamı

Euler kanıtlamıştır ki,

$1/1^2+1/2^2+1/3^2+1/4^2+1/5^2+1/6^2+\ldots=\pi^2/6$'dır. Bunun yardımıyla diğer bazı serilerin toplamını da bulabiliriz. Tek doğal sayıların karelerinin terslerinin toplamı, seri sonsuz giderken neye eşittir?

$(1/1^2+1/3^2+1/5^2+\ldots)(1/1^2+1/2^2+1/4^2+1/8^2+1/16^2\ldots)=1/1^2+1/2^2+1/3^2+1/4^2+\ldots$'dir.

$1/1^2+1/2^2+1/4^2+1/8^2+\ldots=1/[1-(1/2^2)]=4/3$ (geometrik seri toplamı).

$1/1^2+1/3^2+1/5^2+\ldots=A$ dersek $A.4/3=\pi^2/6$'dan $A=\pi^2/8$ bulunur.

Şimdi, $1/1^2+1/2^2+1/3^2+1/4^2+\ldots$ serisinden 3'ü ve 3'ün katlarını içeren terimleri çıkaralım:

$1/1^2+1/2^2+1/4^2+1/5^2+1/7^2+1/8^2+1/10^2+\ldots$ Bu seri şu seriyle çarpılırsa orijinal seriyi verir:

$A=1+1/3^2+1/9^2+1/27^2+\ldots=1/[1-(1/3^2)]=9/8$ (geometrik seri toplamı). $A.9/8=\pi^2/6$'dan, $A=4\pi^2/27$ bulunur.

20 Basamaklı Sayı

10^{64} 65 hanelidir. $(\sqrt{10})^{64}=10^{32}$, 33 hanelidir. $(\sqrt[4]{10})^{64}=10^{16}$, 17 hanelidir.

17<20<33 olduğundan sonuca x dersek $\sqrt[4]{10}<x<\sqrt{10}$ olmalıdır. Buradan 1,7782... <x<3,1622... O halde x=2' dir.

2^{4n+2} +1'in Gizemi

$2^{4n+2}+1=(2^{2n+1}-2^{n+1}+1)(2^{2n+1}+2^{n+1}+1)$.

Bu formül Hanoi Kulesini ve diğer matematik eğlenceleri icat eden Eduard Lucas tarafından bulundu. Bu formülü elde etmek için aşağıdaki denklemde x yerine 2^n koymak yeterlidir.

$4x^4+1=(2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1)$.

Örnek:

$2^{58}+1=(2^{29}-2^{15}+1)(2^{29}+2^{15}+1)$.

Bu formül şöyle bulunmuştur:

$2^{58}+1=(2^{29})^2+1^2=(2^{29}-1)^2+(2^{15})^2=(2^{29}-2^{15}+1)(2^{29}+2^{15}+1)$. 2^{58}-1'in çarpanlara ayrılmasını ilk başaran Aurifeuille olmuştu; fakat o genelleme yapamadı.

Küplerin Farkı

$(x+1)^3-x^3=1+3x^2+3x$. Bunu şöyle yazalım. 1+[6.1/2.$x(x+1)$]. $x(x+1)/2$'yi tanıyoruz. Bu 1'den x'e kadar olan ardışık sayıların toplamıdır, yani x. üçgen sayıdır [Üçgen sayılar şunlardır: 1=0+1, 3=1+2, 6=1+2+3, 10=1+2+3+4, 15=1+2+3+4+5,...]. x. üçgen sayı şöyle yazılabilir: $T_x=x(x+1)/2$. Bunu yukarıdaki x'li denklemde yerine koyarsak şunu buluruz: $(x+1)^3-x^3=1+6T_x$. Örneğin;

$8^3-7^3=169$
=1+168(1+2+3+4+5+6+7)=7.
üçgen sayı=T_7=7x8/2=28 ve 1+28x6=169). İki ardışık sayının küplerinin farkı, sıra numarası ardışık sayılardan küçüğü olan üçgen sayının 1 fazlasıdır. Şöyle bir sonuca vardık: İki sayı kümesinden herbirinin aritmetik ortalaması bulunup sonra bu iki ortalamanın aritmetik ortalaması alınırsa ve bu sonuç bu iki kümeyi toplayarak bulduğumuz yeni kümenin aritmetik ortalamasına eşitse bir olasılık vardır; 1) Kümelerdeki eleman sayısı aynıdır. 2) Kümelerin ortalamaları eşittir. Bir örnek:(1,2,5,8) kümesinin ortalaması 16/4 ve (9,3,6,4) kümesinin ortalaması 22/4=5,5. (Eleman sayıları eşit, ortalamalar farklı) (4+5,5)/2=19/4 ve (16+22)/8=38/8=19/4. Kümedeki eleman sayısı eşit (4) olduğu için iki küme-

yi toplayarak elde ettiğimiz yeni kümenin ortalaması, kümelerin ortalamasının ortalamasına eşit çıktı. Bir diğer örnek (eleman sayıları farklı, ortalamalar eşit): (3,6,9) kümesinin ortalaması 6 ve (4,5,7,8) kümesinin ortalaması da 6. (3+6+9+4+5+7+8)/7=6. İki küme toplamının ortalaması da 6.

İki Kare Farkı

$N=p^2-q^2=(p+q)(p-q)$. $X=p+q$ ve $Y=p-q$ olsun. Bu durumda $N=XY$'dir. X ve Y denklemlerini ekleyelim ve çıkaralım: $X+Y=2p$ ve $p=(X+Y)/2$.

$X-Y=2q$ ve $q=(X-Y)/2$. Demek ki N gibi bir sayı alıp X ve Y çarpanlarına ayırırsak iki bilinmeyenli denklemleri çözerek p ve q'yu buluruz.Ama çorbada sinek var. X ve Y'den biri tek, biri çiftse hem $X+Y$, hem $X-Y$ tek olur ve p ve q tamsayı olamaz.

N tekse böyle bir güçlük olmaz; çünkü tek bir sayının bütün çarpanları da tekdir. N, 4'ün tam katıysa yine güçlük çıkmaz; çünkü 2 çarpanın herbirini 2'nin katı olarak yazarız. Güçlük N, 2'nin katı, fakat 4'ün katı değilse görülür; Örneğin 10=1x10 veya 10= 2x5 ile p ve q tamsayı olamaz. (1+10=11 ve 11/2=5,5 ve 10-1=9 ve 9/2=4,5 vb).

O halde 2 ile bölünüp 4 ile bölünemeyen sayılar iki kare farkı olamaz.

Demek ki 4 ile bölünen her sayıyı iki kare farkı olarak ifade edebiliriz. Örnek: 24=4x6. $p=(4+6)/2=5$ ve $q=(6-4)/2=1$ ve gerçekten $5^2-1^2=24$. Bir diğer örnek 40=4x10 ve $p=(4+10)/2=7$, $q=(10-4)/2=3$ ve $7^2-3^2=40$.

Matematiği İnsan Aklını Onurlandırmak İçin Seçtim

$3=-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$ Çünkü,

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}=2^{1/8}=2^{1/2^3}=2^{2^{-3}}$$
$$\log_2 2^{2^{-3}}=2^{-3}, -\log_2 2^{-3}=3$$

Şimdi örneğin 5 elde edelim:

$5=-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}$ (5 adet kök)

Genel Çözüm:

$N=-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{2}}}$ (N adet kök)

Örneğin N yerine 1 milyon, 1 milyar vb. yazabilirsiniz.

Bu ünlü söz, ünlü Alman matematikçisi Karl Gustav Jacob Jacobi'nindir. Jacobi, Abel ile birlikte eliptik fonksiyonları, Jacobi determinant'ını ve kuantum fiziğinin temelini oluşturan Hamilton-Jacobi kuramını bulmuştur. Dirac pozitronu teorik olarak bulan fizikçidir.

1000. Terimi Bulmak

$a_1=3^{1996}=(3^2)^{998}=9^{998}$. Doğaldır ki $9^{998}<10^{998}$ dir. Diğer yandan biliyoruz ki 10^{998} sayısı 999 hanelidir (10^2=100 üç haneli; 10^3=1000 dört haneli vb). Nasıl 10^2=100'den küçük bir sayı üç değil iki haneliyse, 10^{998} den küçük bir sayı, 999 değil 998 hanelidir. O halde $a_1=9^{998}$ en çok 998 haneli olabilir. Her hane en fazla 9 olabileceğinden a_2 sayısı 9x998=8982'den büyük olamaz. Demek ki a_2 sayısı en fazla 4 haneli olabilir. Her hane en fazla 9 olabildiğinden a_3 sayısı 4x9=36'dan büyük olamaz. Demek ki a_3 en fazla iki haneli olabilir. Her hane en fazla 9 olabileceğinden a_4 sayısı 2x9=18'den küçük olmalıdır. a_4 aynı zamanda 9 ile bölünmek zorunda olduğundan ancak 9 olabilir. Dizinin a_4'den başlayarak bütün terimleri (bu arada a_{1000}) 9 olur.

Bu usavurma genelleştirilebilir: Bir dizinin $(n+1)$. terimi, n. terimin rakamları toplamına eşitse, birkaç işlemden sonra dizinin terimleri aynı sayıya eşit olur. Bu sayı ya 9 dur veya 1. terimin 9 ile bölünmesinden artan sayıdır.

Örnekler: a) $a_1=5^{10}$=9765625; a_2=9+7+6+5+6+2+5=40; a_3=4+0=4; $a_4+a_5=a_6=\dots=a_n=4$. 9765625, 9 ile bölünürse 4 artar. b) a_1=40353606; a_2=27; a_3=9; $a_4=a_5=a_6=\dots=a_n=9$.

Cinli Bir Sayı

Böyle bir sayı ancak şöyle olabilir:

$$N=\underbrace{1111111111}_{10}\underbrace{0000000000}_{10}$$

$7N$'in basamaklarının toplamı 70 ve $19N$'in basamaklarının toplamı 19 olur. $7N$'in basamaklarının toplamınının 70 olduğu bellidir; çünkü

$7N=\underbrace{7777777777}_{10}0000000000$ 'dur.

$19N$'i bulalım:

```
   11111111110000000000
x                    19
-----------------------
   99999999990000000000
  11111111110000000000
-----------------------
  211111111090000000000
```

ve 2+8+9=19.

Süper Tiyatro Problemi

Çözümsüz verilen bu problemin üstte Selçuk Alsan, altta Metin Tabalu (Sabancı Üniversitesi Mekatronik Fakültesi öğrencisi) tarafından çözülmüş şeklini görüyorsunuz.Başka çözümler de olabilir.

$\frac{ABCDK}{EFGHJ}=\frac{\text{sahnedekiler}}{\text{seyredenler}}$

$\frac{ABEFJ}{CDGHK}=\frac{\text{sahnedekiler}}{\text{seyredenler}}$

$\frac{CDGHJ}{ABEFK}=\frac{\text{sahnedekiler}}{\text{seyredenler}}$

$\frac{CAGEK}{DBHFJ}=\frac{\text{sahnedekiler}}{\text{seyredenler}}$

$\frac{DBHFK}{CAGEJ}=\frac{\text{sahnedekiler}}{\text{seyredenler}}$

$\frac{EFGH}{ABCDJK}=\frac{\text{sahnedekiler}}{\text{seyredenler}}$

	sahneye çıkanlar	izleyenler
1.gün	*A,B,C,D,E*	*F,G,H,I,J,K*
2.gün	*G,H,I,J,K*	*A,B,C,D,E,F*
3.gün	*F,A,B,G,H*	*İ,J,K,C,D,E*
4.gün	*F,J,K,C,D*	*G,H,A,B,İ,E*
5.gün	*F,I,J,H,C,E,B*	*G,A,K,D*
6.gün	*F,K,I,G,E,D,A*	*H,B,J,C*

Bir Üçgenin *n*'de Biri

13. yüzyıl İtalyan matematikçisi Giovanni Ceva'nın bulduğu çizgilere cevienne (sevyen) denmektedir. Bir cevienne bir üçgenin tepesini karşı kenar üzerindeki herhangi bir noktaya birleştiren doğrudur. Örnek: Bir ABC üçgeninin her kenarını 3 eşit parçaya ayırıp A'yı a kenarı üzerinde B'ye en yakın noktaya, B'yi b kenarı üzerinde C'ye en yakın noktaya, C'yi de c kenarı üzerinde A'ya en yakın noktaya birleştirelim.

Ortadaki üçgenin alanı ABC'nin yedide biri kadardır. Genel olarak bir üçgenin kenarı n eşit parçaya ayrılır ve bu noktalar tepelerle birleştirilirse merkez üçgeninin alanı şu formülle bulunur:

$S=(n-2)^2/(n^2-n+1)$.

Uzayca

4 ve 7'yi atalım.

1)Zorkun olunmadan kamçak olunamaz. 2)Şomşunların içinde biklos olmayan yoktur. 3) Bastionlar arasında her türlü kamçak vardır. 5) Dobarson olmamak, bastion olmamaktır. 6) Bütün biklosIar zorkundur.

Sonuçlar: Şomşunlar biklostur (2'den). Bikloslar zorkundur (6'dan). Zorkunlar kamçaktır (1'den). Kamçaklar bastiondur (3'den). Bastionlar dobarsondur (5'den).

Bazı dobarsonlar biklostur.

(dobarson $\xrightarrow{5}$ bastion $\xrightarrow{3}$ kamçak $\xrightarrow{1}$ zorkun $\xrightarrow{6}$ biklos).

Bütün şomşunlar bastiondur.

(şomşun $\xrightarrow{2}$ biklos $\xrightarrow{6}$ zorkun $\xrightarrow{1}$ kamçak $\xrightarrow{3}$ bastion).

Çokyüzlünün Yüzleri

Olmayana ergi ile ispatayalım. Varsayalım ki bir çok yüzlünün yüzlerinden herbiri farklı sayıda kenarla çevrilmiştir. Şimdi maksimum (n) sayıda kenar içeren yüzü alalım.Bu yüz n yüze komşu olmalıdır. Fakat çokyüzlünün yüzü olabilecek çokgenlerde kenar sayısı (herbiri farklı sayıda kenara sahip olacağından) 3,4,5,..., (n-1) olabilir; kolayca görüldüğü gibi gerekli n yüz yerine ancak (n-3) yüz bulunabilir. Örneğin yüzlerden birisi altıgense bu altıgene komşu olacak 6 yüz bulunamaz; 3,4,5 kenarlı 3 yüz bulunabilir; altıgenin 3 kenarı boş kalır. Çelişki vardır. O halde yüzlerden ikisinde kenar sayısı aynı olmak zorundadır.

En Zor Yıl

Çözümsüz verilen bu problemi Selçuk Alsan ve Metin Tabalu birbirlerinden habersiz çözdüler.

$10b+d=10a+b+1$

(1 eklememizin neden örneğin 18.. yılının 19. yüzyıl oluşu). Buradan d=0 olacağı bellidir. $9b=10a+1$ olur. Tek çözüm vardır: b=9 ve a=8.

Aranan yıl 8960 veya 8970'dir; 90. yüzyıla aittir.

Uzayda Garip Canlılar

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x}\right)^x$ aranmaktadır. Logaritma fonksiyonuna ara değer teoremini [x, x+a] aralığında uygularsak (a>o):

$\frac{a}{x+a}<\ln\left(\frac{x+a}{x}\right)<\frac{a}{x}$ ve buradan:

$\frac{ax}{x+a}<\ln\left(\frac{x+a}{x}\right)^x<a$ buluruz.

$\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{x+a}=a$ dır

Payı ve paydayı x'e bölelim:

$\frac{a}{1+\frac{a}{x}}, x\to\infty$ iken bu kesin a'ya eşit olur. Buradan:

$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+a}{x}\right)^x=a$ ve buradan da

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x}\right)^x=e^a$

Bu sonuç a'nın her değeri için doğrudur. Bilim adamları bu sonucu alınca rahatlamıştır. x büyüdükçe metalin ağırlığı e^a gibi sonlu bir sayıya gitmektedir.

Bir Mantık Sorusu

Para 1. fincanın altında olsun.Birinci olasılık: 1. (paralı) fincanı aldınız; 1. fincanı elinizde tutarsanız kazanırsınız; 2. veya 3. fincanı alırsanız kaybedersiniz. İkinci olasılık: 2. fincanı aldınız (boş); 2. fincanı elinizde tutarsanız kaybedersiniz; 1. fincanı alırsanız kazanırsınız.Üçüncü olasılık: 3. fincanı aldınız (boş); 3. fincanı elinizde tutarsanız kaybedersiniz; 1. fincanı alırsanız kazanırsınız. Bu üç olasılık eşittir. Birinci olasılıkta ilk aldığınız fincanı tutarsanız kazanırsınız; ikinci ve üçüncü olasılıkta ilk aldığınız fincanı değiştirirseniz kazanırsınız.

O halde ilk aldığınız fincanı elinizde tutarsanız kazanma olasılığınız 1/3, ilk aldığınız fincanı değiştirirseniz kazanma olasılığınız 2/3 tür. İlk aldığınız fincanı değiştirmelisiniz.

Birdirbir Oyunu

Önce 9 ile çarpalım:

$9S_n=9+99+999+\dots+99\dots9$ n tane

$9S_n=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\dots+(10^n-1)$

$9S_n=(10+10^2+10^3+\dots+10^n)-(1+1+\dots+1)$ n tane

$$9S_n=\frac{10^{n+1}-10}{10-1}-n$$
$$S_n=\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}$$
$$10+10^2+10^3+\dots+10^n=\frac{10^{n+1}-10}{10-1}$$

şöyle bulundu:

Bir Geometrik seri $a+ar+ar^2+\dots+ar^{n-1}$ ise n terimin toplamı

$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$ dir.

a=10, r=10 ve $n=n$ aldık:

$$S=\frac{10(10^n-1)}{10-1}=\frac{10^{n+1}-10}{10-1}$$

4'lü Bilmece

$1=\left(\frac{4}{4}\right)^{\frac{4}{4}}$

$2=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}$

$3=\frac{4+4+4}{4}$

$4=\frac{4!-(4+4)}{4}$

$5=4+\left(\frac{4}{4}\right)^4$

$6=\left(\frac{4!}{4}\right)^{\frac{4}{4}}$

$7=4+4-\frac{4}{4}$

$8=4+4+4-4$

$9=4+4+\frac{4}{4}$

$10=\frac{4!+4!}{4}-\sqrt{4}$

$11=\frac{4!+4}{4}+4$

$12=\left(4-\frac{4}{4}\right)4$

$13=\frac{4!+4!+4}{4}$

$14=\frac{4!}{4}+4+4$

$15=4.4-\frac{4}{4}$

$16=4+4+4+4$

$17=4.4+\frac{4}{4}$

$18=\frac{4!+4!+4!}{4}$

$19=4!-\left(4+\frac{4}{4}\right)$

$20=\left(4+\frac{4}{4}\right)4$