Aperiyodik Yazılar III

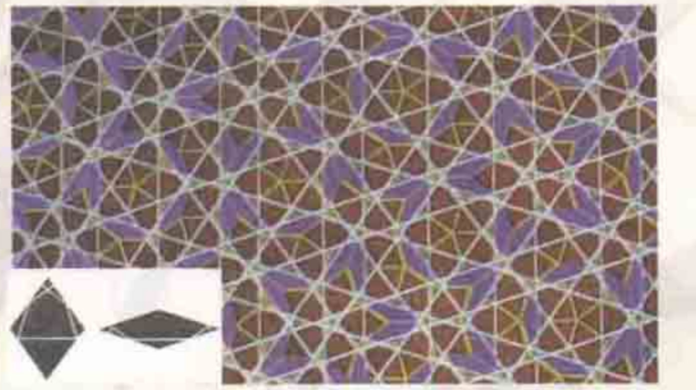
Deney Tüpünden Matematik Çıkarsa

"Bir de rakı şişesinde balık olsam" der Orhan Veli, bir şiirinde. İşte bu başlığı atarken de aynı dize takıldı aklıma. Bir an matematiği deney tüplerine sokmanın ne kadar olanaklı olduğunu düşündüm. Elbette, "deney tüpünden matematik çıkması" pek şiirsel değildi ve bu durum üstadı öyle fazla da efkârlandırmazdı, ama bir tutam "geometri" ile iki ölçek "lineer cebir"i bir kaba koyup, ortaya yeni bir teorem çıkarmak da az buz bir şey sayılmazdı. Aslında bu yazıda matematik deney tüpünden çıkmak yerine o tüpe zorla giriyordu, ama olsun. Başlık, bu seferlik matematiksel düşlere ve Orhan Veli'nin dizesine kurban gitmişti.

Geçen sayıda Penrose karoları ile tanışmıştık. Onları özel kılan yan ise, hatırlayacağınız gibi, düzlemi aperiyodik olarak kaplamalarıdır. Oysa Penrose karolarının çekiciliği yalnızca aperiyodik olmalarına dayanmaz. Aslında, karoların oluşturduğu desenlerde bu aperiyodik karakterleriyle pek de bağdaşmayan tam bir konumsal düzen gözlenmektedir. Bu konumsal düzeni görebilmek için yapılması gereken, karolara sadece birkaç doğru parçasını eklemekten ibarettir (Şekil 1). Böylelikle karolar bir Penrose deseni oluşturmak için yeniden biraraya getirildiklerinde, doğru parçaları da birleşerek beş ayrı paralel doğru kümesi meydana getirir. Eğer aynı düzlem üzerine bir beşgen çizer ve döndürmek suretiyle uygun konum verirsek, her bir doğru kümesini beşgenin kenarlarından birine paralel bulmamız da işten bile değildir. Sözkonusu beş paralel doğru kümesi, ilk olarak *Robert Ammann* tarafından bulunmuş ve böylece doğrulara *Ammann doğruları* denilmiştir.

Öte yandan bu doğruların ilgi çeken bir özellikleri daha vardır: Aralıklar... Her bir doğru kümesini oluşturan paralel doğruların arasında, diğer tüm doğru kümeleri için de aynı kalan iki tür aralık vardır ki, bunlardan uzun olanını U ve kısa olanını da K diye adlandırabiliriz. İşte bu aralıklar, bizi yine o "estetik" cevaba yöneltir: U'nun uzunluğunun K'nın uzunluğuna oranı *altın oranı* vermektedir. Üstelik, sonsuz bir düzlem üzerinde bir doğru kümesindeki U'ların sayısının aynı doğru kümesinde K'ların sayısına oranı da altın orana eşittir. Eğer bir doğru kümesine dik olarak ilerlersek, önümüze çıkan aralık dizilerini U'ların ve K'ların oluşturduğu bir dizi olarak görebiliriz. KUKUUKUKU... örneğinde olduğu gibi. Bu dizi periyodik değildir ve bizlere Penrose karolarının bir boyutlu benzerini sunmaktadır. Hem de bu karoların en bildik özelliğini koruyarak...Söz konusu özellik, hatırlarsanız, herhangi bir kaplamadaki sonlu bir bölgenin aynı desen içerisinde yine kendini gösterdiği ya da tekrarladığıdır. Şimdi bu benzerliği görmek için, kalemi kâğıdı elinize alın ve aralıklar dizimizin herhangi bir yerinden başlayarak sonlu bir uzunluktaki harf dizisini kağıda geçirin. İnsaflı davranalım ve bu sonlu uzunluğu 100 harfle sınırlayalım. Şimdi yine herhangi bir yerden başladığınızda, bir yerlerde mutlaka aynı 100 harflik diziye ulaşmanız gerekir. "Gerekir" diyorum; çünkü bu aralıklar dizisinin sonsuz uzunlukta olduğu düşünüldüğünde, aynı 100 harflik diziye nerede ulaşılacağını tahmin etmek güç...Tabii, diğer bir seçenek de tüm bunları yaptığınızı varsayıp, matematikçilere olan güveninizi tazelemek olacaktır.

Bu diziyi oluşturmanın bir yolu daha vardır. O da sonlu bir harfler (U ve K) dizisini alıp, dizideki her U'yu UK ve her K'yı da U ile değiştirmekten ibarettir. Aynı yol tekrar tekrar uygulandığında daha uzun dizilere ulaşılır ve bunlar *Ammann doğrularının* oluşturdukları aralıklarla birebirdirler. Ancak ortaya çıkan bu diziyi yalnızca bir harfler dizisi olarak görmek, açıkçası *Fibonacci*'ye haksızlık olur. 13. yüzyılda yaşamış olan Fibonacci'nin 20. yüzyılın yap-boz oyunlarını andıran bu karoları ve onların aralıklarıyla ne ilgisi olduğuna gelince...Bu ilgiyi görmek için, Aperiyodik Yazılar'ın ilkinde de bahsettiğimiz, "tavşan problemi" ni bir kez daha hatırlamakta yarar var: Fibonacci, her ay erişkin bir tavşan çiftinin (U) bebek bir tavşan çifti (K) dünyaya getirdiğini varsayar. Ayrıca her bebek tavşan çifti, bir ay içinde erişkin hale gelmektedir. Bu durumda bir ay sonra her bir erişkin çift (U) yerine bir erişkin ve bir de bebek çift (UK) olacak, her bir bebek çiftin (K) yerine de bir erişkin çift (U) geçecektir. Görüldüğü gibi, Fibonacci'nin tavşanları Ammann'ın aralıklarıyla aynı düzende bir tavşan topluluğu ya da daha matematiksel bir deyimle " dizi" oluşturmaktadır. Üstelik Fibonacci'nin artış esasına dayanan sonsuz bir tavşan topluluğunda erişkinlerin (U) bebek çiftlere (K) oranı da yine *altın oranı* vermektedir.



Şekil 1. Eğer her bir karoya, yanda görüldüğü gibi, beyaz doğru parçaları eklenirse, bu doğru parçaları birleşerek, sürekli paralel doğruları içeren beş küme oluştururlar. Söz konusu doğrular, Ammann doğruları olarak anılırlar.

İşte Penrose desenindeki konumsal düzeni, Fibonacci'nin ortaya koyduğu bu ardışıklık belirlemektedir. Görüldüğü gibi, bu ardışıklığı da iki farklı aralığı temsil eden U ve K sağlar. Yani harfler ya da aralıklar dizimiz, iki farklı aralığın, diğer bir deyişle iki ayrı periyodik sistemin çakışmasından elde edilir. Bu nedenle de bu aralıklar dizisi, *periyodiğimsi* (quasiperiodic) olarak adlandırılmıştır.... Ve bu noktadan itibaren Penrose karoları, kendilerini yavaş yavaş, onlar için yepyeni bir çevre olan laboratuvarda ve de kristallerin arasında buluverirler. Nasıl mı?

Oyunun Yeni Bir Sürümü

Penrose, bulduğu karolarla yalnızca iki boyutlu desenler yaratmamış ve bu zevkli uğraşıyı üçüncü boyuta da taşımıştı. Yani bir bakıma, "Penrose oyunu"nun daha zevkli ve daha ilgi çekici bir sürümü karşımıza çıkıyordu: "Bastırılmış küpler"le uzayı kaplamak gibi... Burada "bastırılmış küpler"den kastımız ise, altı yüzü de eş büyüklükteki eşkenar dörtgenlerden oluşan paralelyüzler; kısaca eşkenar paralelyüzler... İşte bunlar beşli simetriye -ya da üç boyutta ikosahedral simetriye- sahip ve aperiyodik olarak uzayı kaplayan yapılar oluştururlar. Düzgün yirmiyüzlü, yani ikosahedron da, üç boyutlu uzayda beşli simetrinin bir modelidir ve yirmi özdeş üçgen yüzden oluşur. Beşgenlerle düzlem tam olarak kaplanamadığı gibi, düzgün yirmiyüzlü de uzayı tam olarak kaplayamamaktadır. Ancak eşkenar paralelyüz çiftleri ile uzay kaplanabilir ve bunlar Penrose'un uçurtma ile ok ucunun üç boyutlu benzerleridirler. Dolayısıyla yine her iki tipteki eşkenar paralelyüzlerin birbirine oranı *altın oranı* verir.

Roger Penrose, tüm bunlarla uğraşmaya başladığında, bulduklarının pratikte ne işe yarayabileceği hakkında hiçbir fikri yoktu. Karolar, onun için sadece zevkli bir uğraşı, hatta bir oyundu. Ancak bir süre sonra, kristal formlar hakkında bilinenleri, elde ettiği sonuçların değiştirebileceğini düşündü. Bu konuyla uğraşan hemen herkesin kesinlikle doğru kabul ettiği geleneksel kuralları, Penrose kolayca kabullenemiyordu. Bu kurallar, aperiyodik yapıları yasaklıyordu, çünkü kristallerde atomların uzayı tam olarak kaplayabilmesi için tam bir düzen içinde dizilmeleri gerekiyordu. Örneğin; bildiğimiz tuzda sodyum ve klorid iyonları bir kübün köşelerinde konumlanmışlardı ve bu küpler bir tuz kristalini doldurabilmek için tam bir düzen takip ediyorlardı.

Başta Penrose'un fikirleri pek ciddiye alınmadı, ama 1984 yılında bir anda tüm dikkatler onun üzerine çevriliverdi. Alüminyum ve manganezden oluşan küçük madeni kristaller keşfedilmişti ve bunlar şaşırtıcı bir biçimde beş kollu kar tanecikleri formundaydılar (Şekil 2). Kristallerden yansıyan X ışınları ve elektronlar Penrose'un beşli simetrisini göstermekteydi ki, bu durum kristaller üzerine tüm bilinenlerin ışığında "olanaksızdı".

Aslında bir katı maddedeki atomların dizilişi, bir deseni oluşturan karoların yerleşimiyle karşılaştırılabilir. Kristallerde atomlar ya da atom kümeleri kendini tekrarlayan motifler halinde belirirler ve bu tekrarlayan motifler -ki onlara *birim hücre* denir- birleşerek kristal bir yapı oluşturur. Ayrıca kristallerde büyük bir düzen görülür. Öyle ki bir insanın kristalin içine girdiğini farzedecek olsak; bu kişi bir *birim hücre* kadar yer değiştirdiğinde, gördüğü görüntüler arasında hiçbir fark olmayacaktır. İşte kristallerdeki bu yüksek düzen, yalnızca üçgen, kare ya da altıgen ve de bunların değişik formlarıyla sağlanabilecek gibidir. Kristallerin incelenmesinde de sıkça başvurulan ve matematikte "grup teorisi" adı altında toplanan bilgiler, kristaller için yalnızca az sayıda dönme simetrisini mümkün görmektedir. Örneğin; eğer kristal, eksenlerinden birine göre 120 derece döndürülür ve kristalin kafes yapısı görünüm olarak değişiklik göstermezse, bu durumda kristal üçlü dönme simetrisine sahip demektir. Genelde ise, kristaller ikili, üçlü, dörtlü ve altılı dönme simetrisine sahiptirler.

Ancak Penrose'un ortaya koyduğu örnekler, birden fazla *birim hücre* kullanılır ve de tam bir geometrik düzen konusunda biraz taviz verilirse, beşli bir simetrinin mümkün olduğunu göstermiştir. Bu durumda, karolar ne rastgele dizilmekte ne de muntazam bir sırayı takip etmektedir. Bir karonun yerleşimi sayesinde, diğer karoların da nasıl dizilmeleri gerektiği, anlaşılması güç de olsa, tahmin edilebilmektedir. Ayrıca her bir karo da yalnızca, özel yönlerden oluşan küçük ve farklı kümeler doğrultusunda yerleşmektedir. Örneğin; Penrose karoları, uzaktan daireye benzetilebilen, ongenlerin dağılımını göstermektedir. Bir desen içerisinde tüm bu ongenler aynı yerleşime sahiptirler ve bir ongen diğer ongenlerin karşılık gelen kenarlarına paraleldir.

Yeni keşfedilen kristaller, hem yüksek bir düzene hem de beşli bir simetriye -ya da üç boyutlu uzayda ikosahedral simetriye- sahip görünmektedir. Bu özelliklere en uygun matematiksel model ise, Penrose karoları üzerine kurulmuş olandır. Fikir, *eşkenar dörtgenyüzlü triakontahedronları* kullanmaya dayalıdır ve uzayı kaplayacak birimler olarak bu çokyüzlüler, on şişman on da zayıf eşkenar paralelyüzlünün biraraya gelmesiyle oluşmaktadır. Bu birimler, iki boyutta Penrose karoları için geçerli olan diziliş kurallarına aynen uyarlar.

Bu ilginç ve yeni kristaller elektron ışınları altında döndürüldüğünde, dağılımlar ikili ve üçlü olduğu kadar çok sayıda beşli simetri ekseninin de varlığını göstermektedir. Bu eksenler arasındaki açılar belirlendiğinde, maddemizin bir düzgün yirmiyüzlü, yani ikosahedronla, aynı simetriye sahip olduğunu söylemek mümkündür. Beşli simetri gösteren altı ikosahedral eksen, altı boyutlu bir uzayın temelini oluşturur. Sözkonusu uzayda kristal, kübik bir birim hücreye sahip olmalıdır ve bu da birim hücrelerin düzgün ve periyodik bir kristal kafes yaratacağı anlamına gelir. Ancak altı boyutlu yapı, üç boyutta bir izdüşüm olarak gözlendiğinde, periyotluk ortadan kaybolmaktadır. Üç boyutlu izdüşüm, *periyodiğimsi*dir.

Yeni yapılar, normal kristaller gibi yüksek düzene sahip, ancak periyodik olmak yerine periyodiğimsi olduklarından, *periyodiğimsi kristaller* ya da kısaca *kristalimsiler* (quasicrystals) olarak adlandırılmışlardır. Hem de aynı Süpermen ya da Örümcek Adam gibi, iki kimlikleri vardır. Altı boyutlu uzayda, düzenli ve tamamen sıradandırlar. Üç boyutta ise, olağandışı özelliklere sahiptirler ve bilinen kristallerle hemen hiç uyuşmazlar. Bu yeni yapılar, kristaller için yeni boyutlar açmakta ve bu dalla uğraşanları da öğrenilecek yeni bir matematikle yüzyüze bırakmaktadır.

Elbette, hikâyenin son noktası henüz konmuş değildir ve kristalimsilerin yapısını açıkla-

Şekil 2. Yukarıdaki fotoğrafta, çeşitli örneklerin farklı açılardan gözlenmesiyle meydana gelmiş ve üç boyutlu uzayda yeniden oluşturulmuş atom yapısını gösteren bir model vardır. Görüldüğü gibi bu model, beş kollu bir kar taneciği şeklindedir.

yan birden fazla model gözükmektedir: Penrose, cam ve rastgele kaplama modelleri. Bunlardan Penrose modeli, yukarıda belirttiğimiz görüşleri ortaya koyar. Diğer bir model olan cam modeli ise, bazı kurallara bağlanmak suretiyle kısıtlanmaya çalışılsa da, Penrose modelinin aksine, "gelişigüzel" birleşme özelliğine dayanır. Şimdilerde her iki modelin de sundukları en iyi özellikleri biraraya getiren yeni bir model, rastgele kaplama modeli ortaya konmaktadır.

Sorular, sorular....

Yine bugünlerde, matematikçiler için yeni heyecanlar kapıdadır. İki boyutlu karolar için geçerli diziliş kurallarının yalnızca beşli değil, sekizli ve onikili simetriye sahip desenlerin oluşumuna da izin verdiği bilinmektedir. Peki, başka olasılıklar var mıdır? Aynı soru uzayı kaplayan üç boyutlu yapılar için de geçerlidir ve bu soruların cevapları, yeni kristal formlarla karşılaşıp karşılaşmayacağımızın yanıtını da içlerinde saklamaktadır.

Peki ya "hayatımız"? Zaten o da Penrose karoları ile kurulu bir yap-boz oyununu andırmıyor mu? Aperiyodik ve beklenmedik...

Han Nazmı Özsöylev

Kaynaklar

Bergil, M.S., *Doğada, Bilimde, Sanatta Altın Oran*, İstanbul 1988

Gardner, M., *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*, New York, 1989

Nelson, D.R., "Quasicrystals", *Scientific American*, Ağustos 1986

Peterson, I., *The Mathematical Tourist*, New York 1988

Steinhardt, P.J., "Quasicrystals", *American Scientist*, Kasım-Aralık 1986

Stephens, P. ve A. Goldman, "The Structure of Quasicrystals", *Scientific American*, Nisan

Çözmece

1. Metan molekülü, karbon atomu ağırlık merkezinde ve dört hidrojen atomu da köşelerde olmak üzere, düzgün bir dörtyüzlü yapısına sahiptir. Buna göre her bir hidrojen ve karbon çiftinin oluşturduğu bağlar arasındaki açı nedir?

2. (a) $x+y=1$

$x^2+y^2=2$

$x^3+y^3=3$

denklem sisteminin çözümü olmadığını kanıtlayın.

(b) $x+y=1$

$x^2+y^2=2$

$x^3+y^3=k$

denklem sistemi en az bir çözüme sahip olacak şekilde, k'nın tüm değerlerini belirleyin.

Geçen Ayın Çözümleri

1. En küçük açısı $n°$ ve tüm açıları tamsayı olan üçgenlerin sayısı, n'nin çift ya da tek olmasına bağlı olarak

$$\frac{1}{2}(180-n)-n+1=91-\frac{3}{2}n$$

veya

$$\frac{1}{2}(180-n)-\frac{1}{2}-n+1=\frac{181}{2}-\frac{3}{2}n \text{ dır.}$$

(Örneğin; $n=20$ için üçgenler (20°,20°,140°),(20°,21°,139°),..., (20°,80°,80°) açılarına, $n=21$ için (21°,21°,138°), (21°,22°,137°),..., (21°,79°,80°) açılarına sahip olacaktır). Bu nedenle tüm açıları tamsayı olan üçgenlerin toplam sayısı

$$\sum_{k=1}^{30}\left([91-\frac{3}{2}(2k)]+[\frac{181}{2}-\frac{3}{2}(2k-1)]\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{30}(183-6k)=2700 \text{ olur.}$$

2. x asal ve $z-y>1$ olsun. O zaman

$x^n=z^n-y^n=(z-y)(z^{n-1}+z^{n-2}y+...+y^{n-1})$

olur. Bu durumda $k<n$ şeklinde bir doğal sayı için

$z-y=x^k$ ve $z^{n-1}+z^{n-2}y+...+y^{n-1}=x^{n-k}$

elde edilir. Böylelikle,

$x^{n-k}>z^{n-1}=(x^k+y)^{n-1}>x^{k(n-1)}$

olur ki, bu da $n-k>nk-k$, yani $n>nk$ sonucunu verir. Ancak bu mümkün olamayacağından, $z-y>1$ için x asal olamaz. Aynı şekilde $z-x>1$ için de y asal olamaz.