MATEMATİK OLİMPİYATLARI

SORULARIN ÇÖZÜMÜ

Prof.Dr. Okay Çelebi *

SORU : 3

Bir f fonksiyonu pozitif tam sayılar cümlesinden, pozitif tam sayılar cümlesine, her n pozitif tam sayısı için aşağıdaki şekilde tanımlanıyor:

$$f(1) = 1,\ f(3) = 3$$
$$f(2n) = f(n)$$
$$f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$$
$$f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n).$$

$f(n) = n$ koşuluna uyan ve 1988'den küçük ya da 1988'e eşit olan n pozitif tam sayılarını bulunuz.

CEVAP : 3

Tanımlanan kurallara göre;

n: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, . . .

f(n): 1, 1, 3, 1, 5, 3, 7, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15, 1, 17, . . .

dir. Yukarıdaki tablodan

$f(2^k) = 1,\ f(2^k-1) = 2^k-1,\ f(2^k+1) = 2^k+1$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu bize problemde ikili sayı sistemlerinin kullanılabileceğini ima eder. Çözümdeki önemli adım şudur:

f(n) = n nin 2 tabanına göre açılımının tersten okunuşu ile elde edilen sayıdır.

Bu önerme tüme varımla ispatlanacaktır. $f(2n) = f(n)$ olduğundan yalnızca tek sayılar göz önüne alınmalıdır.

n, sayısı $4m+1 = \sum_{j=0}^{k} \epsilon_j 2^j,\ \epsilon_0 = 1,\ \epsilon_1 = 0$

şeklinde ise

$$m = \sum_{j=2}^{k} \epsilon_j 2^{j-2} \text{ ve } 2m+1 = 1 + \sum_{j=1}^{k} \epsilon_j 2^{j-1}$$

dir. Tüme varım ile

$$f(2m+1) = 2^{k-1} + \sum_{j=2}^{k} \epsilon_j 2^{k-1-(j-1)}$$
$$= 2^{k-1} + \sum_{j=2}^{k} \epsilon_j 2^{k-j}$$

ve

$$f(m) = \sum_{j=2}^{k} \epsilon_j 2^{k-j}$$

bulunur. O halde

$$2f(2m+1) - f(m) = 2^k + 2\sum_{j=2}^{k} \epsilon_j 2^{k-j}$$
$$- \sum_{j=2}^{k} \epsilon_j 2^{k-j} = 2^k + \sum_{j=2}^{k} \epsilon_j 2^{k-j}$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \epsilon_j 2^{k-j}$$

bulunur.

Eğer n,

$$4m+3 = \sum_{j=0}^{k} \epsilon_j 2^j,\ \epsilon_0 = 1,\ \epsilon_1 = 1$$

şeklinde ise

$$m = \sum_{j=2}^{k} \epsilon_j 2^{j-2}$$

ve

$$2m+1 = 1 + \sum_{j=2}^{k} \epsilon_j 2^{j-1}$$

dir.

O halde işlem yolu ile

$$3f(2m+1) - 2f(m) = 2^k + 2^{k-1} + \sum_{j=2}^{k} \epsilon_j 2^{k-j}$$

bulunur. Ve bu da yine

$$\sum_{j=0}^{k} \epsilon_j 2^{k-j}$$

dir. Dolayısıyla yukarıdaki önermemiz ispatlanmış oldu.

Demek ki 2 tabanına göre açılımları, sağdan sola ya da soldan sağa doğru okunduğunda aynı olan ve [1, 1988] kapalı aralığında bulunan tamsayıların sayısı bulunmalıdır.

$2^{10} < 1988 < 2^{11} = 2048$ dir. 2048 den küçük olan bu türden sayılar 1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 8 + 8 + 16 + 16 + 32 = 94 tanedir. Öte yandan $1988 = (11111000100)_2$ dir. Bu sayıdan büyük ve 11 basamaklı olan iki yönden de okuşunu aynı sayıyı veren yalnızca iki sayı vardır. Dolayısıyla istenen tam sayıların adedi 92 dir.

SORU : 4

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

* *Olimpiyat Ekip Başkanı, A.Ü. Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi*

eşitsizliğnii sağlayan x reel sayılarının cümlesinin, uzunlukları toplamı 1988 olan ayrık aralıkların birleşimi olduğunu gösteriniz.

CEVAP : 4

Verilen eşitsizliği sağlayan reel sayıların cümlesi S olsun.

$$[1] \quad 5\prod_{j=1}^{70}(x-j) - 4\sum_{k=1}^{70} k \prod_{j\neq k}^{70}(x-j)$$

polinomunun sıfır yerlerini x_i, $i = 1, 2, \ldots, 70$ ile gösterelim. Bir grafik yardımıyla S cümlesinin ($i<x_i<i+1<x_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, 69$ olmak üzere) $(i, x_i]$ aralıklarının birleşimi olduğunu görürüz. [1] polinomunun kökleri toplamı

$$\sum_{j=1}^{70} j + \frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70} k$$

dır. Dolayısıyla S cümlesinin uzunluğu

$$|S| = \sum_{i=1}^{70}(x_i - i) = \frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70} k = 1988$$

olur.

SORU : 5

ABC, dik açısı A köşesinde olan bir dik üçgen ve D, A'dan çizilen yüksekliğin ayağı olsun. ABD ve ACD üçgenlerinin iç çemberlerinin merkezlerini birleştiren doğru AB ve AC kenarlarını sırasıyla K ve L noktalarında kesmektedir. S ve T sırasıyla ABC ve AKL üçgenlerinin alanları ise, $S \geqslant 2T$ olduğunu gösteriniz.

CEVAP : 5 (Yarışmada Ozan Hafızoğulları'nın verdiği çözüm) K' ve L' sırasıyla [AB] ve [AC] kenarları üzerinde A dan $|AD|$ kadar uzaklıkta seçilen noktalar olsun. Bilindiği gibi iç çemberin merkezi açıortayların kesişme noktasıdır. I_1, I_2; $\widehat{ABD}$ ve $\widehat{ADC}$ nin iççemberlerinin merkezleri olsun. $\overset{\triangle}{AK'D}$ ikizkenardır; dolayısıyla AI_1 açıortayı simetri eksenidir. $m(ADI_1) = 45° = m(I_1K'A)$. $\widehat{AK'L'}$ ikizkenar dik üçgen olduğundan $K'I_1$ ve $K'L'$ aynı doğruyu gösterir. Yani K', I_1, L' doğrusaldır. Benzer şekilde K', I_2, L' nün de doğrusal olduğu ispatlanabilir. O halde K', I_1, I_2, L' doğrusaldır. Dolayısıyla iççemberlerin merkezlerini birleştiren doğru [AB] ve [AC] yi K = K', L = L' de keser.

$$A(\widehat{AKL}) = \frac{\overline{AK}.\overline{AL}}{2} = \frac{\overline{AD}^2}{2} = \frac{\overline{BD}.\overline{DC}}{2}$$

$$= \frac{\overline{AC}.\overline{AB}\cos B \sin B}{2}$$

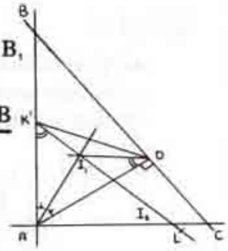
ve

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{\overline{AB}.\overline{AC}}{2} \text{ dir.}$$

Sinüs fonksiyonunun özelliklerinden

$$1 \geqslant \sin 2B$$

ve



$$\overline{AB}.\overline{AC} \geqslant 2\,\overline{AB}.\overline{AC}\sin B\cos B,$$

$$\frac{\overline{AB}.\overline{AC}}{2} \geqslant 2\,\frac{\overline{AB}.\overline{AC}\sin B\cos B}{2}$$

yazılabilir. Bu ise

$$A(\widehat{ABC}) \geqslant 2\,A(\widehat{AKL})$$

demektir.

Not : *Bu soruyu ekibimiz elemanlarından De-Yüret de tam olarak çözmüştür.*

SORU : 6

a ve b pozitif tamsayıları, ab + 1 sayısı $a^2 + b^2$'yi tam olarak bölecek şekilde seçilsin. $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ ifadesinin, bir pozitif tam sayının karesi olduğunu gösteriniz.

CEVAP : 6

$[(a^2+b^2)/(ab+1)] = q \in N$ dersek $a^2+b^2 = qab+q$ olur. Verilen ifade a ve b ye göre simetrik olduğundan $a \leqslant b$ seçebiliriz. Önce

$$qa - a < b \quad \text{ve} \quad b \leqslant qa$$

eşitsizliklerinin doğru olduğunu göstereceğiz.

I. Birinci eşitsizliğin ispatı:

$$qab < qab + q = a^2 + b^2 < ab + b^2,$$

$$qab < ab + b^2 \quad \text{ve} \quad qa < a+b.$$

II. İkinci eşitsizliği ispatı:

$b>qa$ olduğunu varsayalım. O halde bir $c \in N$ için $b = qa + c$ dir. Demek ki

$$a^2 + b^2 = qab + q;\ a^2 + (qa+c)^2 = qa(qa+c) + q;$$

$$a^2 + q^2a^2 + 2qac + c^2 = q^2a^2 + qac + q;$$

$$a^2 + qac + c^2 = q$$

(Devamı 59. sayfada)

rarası boşluklar süngersi bir hal almıştır; burada mantarın lifleri (hifler) yapışkan ve asit bir ortamda yüzer. Bu yapışkan ortam hava kirletici parçacıkları ve maddeleri depolamaya çok uygundur.

Likenlerle hava kirliliğini izlemede en etkili yöntem biyoendikasyondur ve bu, bir bölgede liken florasını gözlemekten ibarettir. Bazı liken türleri, bazı elemanları tercihan özümler ve böylece o elemanların göstergesi olur. Örneğin bir bölgede azot seven (nitrofil) likenlerin artması, havanın azotlu bileşiklerle kirlendiğinin belirtisidir. Azotlu bileşiklerle kirlenme, toprağın altına gaz veya sıvı şekilde kimyasal gübre püskürtülmesiyle ilgilidir.

Hava kirlenmesi, bir bölgedeki bazı tür likenlerin yok olmasına, daha dirençli diğer tür likenlerin ise artmasına yol açabilir. Likenlerde çeşitli elemanlar depolanabilir. Örneğin alüminyum, tuğla, cam, çelik ve gübre (fosfat) fabrikalarından çıkan uçucu flüorürler (Al, Si, Ca ve Na-Al flüorürleri, HF) ve nükleer bomba denemelerinden gelen cesium 137 ve stronsyum 90, radyoaktif plutonyum (238, 239 ve 240 izotopları) ve ağır metaller (Fe, Zn, Cd, Mn, Cu, Pb ve) likenlerde birikebilir.

1924'den beri benzinlere patlama önleyici (antidetonant) olarak PB tetraet ve Pb tetrametil konulması, havaya otomobil başına yılda 1 kilo Pb karışmasına neden olmaktadır. Benzine katılan Pb'un 0,4 gr/l'yi geçmemesi gerekmektedir. Buna rağmen oto yollarının kenarında yılda 100-300 gr ve büyük şehirlerde günde 1 ton Pb havaya karışmaktadır. Likenlerde oto yollarına yakınlığı oranında daha fazla Pb bulunmaktadır.

Hava kirliliği, likenlerde fotosentezi % 50 kadar azaltmaktadır.

Kuzey'de ren geyikleri liken yediğinden, likenlerde toplanan zehirler ren geyik sütü ve eti ile insanlara geçmektedir. Bunlardan özellikle ^{137}Cs, ^{90}Sr ve Pb insanlar için zararlıdır.

Hava kirliliği yapan maddeler pancar, mısır, salata ve baklagillerde de bulunmuştur. □

MATEMATİK OLİMPİYATLARI

(Baştarafı 52. sayfada)

Yani

$$q \leq qac < a^2+qac+c^2 = q$$

ve $q<q$ bulunur, ki bu bir çelişkidir. O halde $b \leq qa$ olmalıdır.

Böylece $qa-a<b\leq qa$ dan $0\leq r<a$ ve $r\in N$ olmak üzere $b = qa-r$ elde ederiz. Bu değeri $a^2+b^2 = qab+q$ da yerine yazarsak

$$a^2+(qa-r)^2 = qa(qa-r)+q,$$

$$a^2+q^2a^2-2qar+r^2 = q^2a^2-qar+q$$

ve

$$a^2+r^2 = q(ar+1)$$

veya

$$\frac{a^2+r^2}{ar+1} = q$$

buluruz. Demek ki (a, b) ikilisi

$$\left[(a^2+b^2)/(ab+1)\right] = q$$

denklemini sağlıyorsa (r, a) ikilisi de

$$\left[(r^2+a^2)/(ar+1)\right] = q$$

denklemini sağlar. $0 \leq r < a \leq b$ olduğundan (r, a) ikilisinin birinci bileşeni (a, b) ikilisinin birinci bileşeninden daha küçüktür. Pozitif sayıların kesin azalan monoton bir sonsuz dizisi bulunmadığından, birinci bileşeni küçük olan ikilileri ancak $r = 0$ a kadar elde edebiliriz. $\left[(a^2+r^2)/(ar+1)\right] = q$ ve $r = 0$ dan $q = a^2$ bulunur. Dolayısıyla q bir tamsayının karesidir.

UYARI: Yukarıda sözü edilen (a, b) ikilileri gerçekten vardır. Örnek olarak (2, 8) i gösterebiliriz.

GÜNÜMÜZDE BİLİM VE TEKNİK ELELE GİTMEKTEDİR. İLERİ ÜLKELERDE BİLİMSEL DÜŞÜNCEYE HEP BİR PRİM, BİR ARMAĞAN VARDIR. KENDİ KENDİMİZE SORMALIYIZ. GENÇLERİMİZİN YETENEKLERİNİ, UYGARLIĞIMIZI GELİŞTİRMEDE KULLANACAKLARI FIRSATLARI SAĞLAMAKTA MIYIZ?

Prof. Abdus SELAM