Düşünmek ya da düşünmemekte direnmek

BABİLLİLER VE KARMA SAYILAR

Dr. Herman AMATO
Çizen: Ferruh DOĞAN

Yiğit kişiler. Eğer bugüne kadar yazılanlar sizi sıktı ise, ne olur, biraz daha sabredin ve bu yazıyı da okuyun. Göreceksiniz, VE ile VE-YA'nın anlamını kavramadan da birçok problemleri çözmek mümkün. Her gün karşınızda bulunan ve sık sık başvurduğunuz sayılara biraz soru dolu gözlerle bakmakla, biraz da elinize kâğıt kalem almakla, size belki de güç gelmiş olan, eskiden verdiğimiz bazı problemleri, şimdi kolaylıkla çözmek mümkün. Ne olur? Birçoklarının düşünce sözkonusu olunca yaptığı gibi, yiğitliğin on şartından dokuzunu yerine getirmeyin : Ne olur? Kaçmayın!

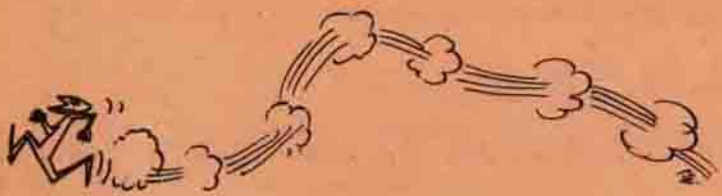
Babilliler ve Karma temelli sayılar. Yeni bir buluş yapmaya gerçekten niyetiniz varsa, başkalarının bu konuda ne düşündüğüne bakmaksızın, yeniliğinizi ortaya atın, sonra da bu işi sizden önce yapanların ne yaptıklarını araştırın. Çoğun bu parlak buluşunuz yeni bir çığır açacak yerde, bunu sizden önce bulmuş olana hitaben bir tebrik mektubu yazmak içinizden gelir.

Bu karışık gibi görünen ve aslında çok basit olan hesapları — karşımdakileri kaçırmadan — öğretmek için yeni bir yol ararken ben karma sayıları yeniden keşfettim. Sonra da bu işi benden önce hangi mutlu kişilerin yaptığını araştırdım. Böylece bu sayıların çivi yazıları ile Babilliler tarafından, pişmiş killi toprak üzerine kazıldıklarını öğrendim. Pek de eski sayılmaz 5000 yıl kadar önce. Babilliler bu karma sayıları iki değişik işaret yardımıyla yazıyorlardı. Sonradan sıfır yerine geçebilecek bir işaret de bunlara eklendi. 1 (bir) yerine kullanılan işaret hem 1 (bir) hem de 60 anlamına geliyordu; 10 yerine de başka bir işaret vardı. Babilliler 10 temeline ve 60 temeline dayanan sayıların karma olarak kullanıldığı bileşik bir sayı sistemi ortaya atmışlardı. Yanı bu sayıların bazı basamaklarında 10 temeline dayanan rakamlar, öteki basamaklarında ise 60 temeline dayanan rakamlar bulunuyordu.

Çoğumuz sayılar konusunda uyur gezer gibi davranıyoruz. 10 temel sayıya dayanan bildiğimiz adi sayılara alışmış olanlara, ilk anlarda başka bir sistemin mevcut olabileceğini kabul etmek imkânsız gibi görünür. Burada 0 dan 9'a kadar neden 10 işaret kullanılıyor da daha fazla veya daha eksik sayıda işaretler kullanılmıyor? diye sorana rastlamadım. Bilmem siz rastladınız mı? Oysaki her basamakta istediğimiz kadar işaret kullanarak, istediğimiz kadar çeşitli sayı sistemleri türetebiliriz. Bunların yararlarını geçen yazımızda anlatmıya çalışmıştık.

Bildiğimiz sayı sisteminde her basamakta hep ayni 10 temel sayı kullanılır. Yani değişik basamaklarda kullanmıya hakkımız olan temel sayı adedi değişmez. Her basamakta daima on sayıdan birini kaydederiz. Kaydedebileceğimiz sayılar hep on, on, on diye gider.

Siyah ve Beyaz Bilyeler ve Bir Seçim Formülü. Oysaki başka bir imkân daha vardır: Degişik basamaklarda değişik sayıda temel sayı kullanarak yeni sayılar türetilebilir. Örneğin bu türetme işi birinci basamakta 6 temel sayı, ikinci basamakta 12 temel sayı kullanılarak yapılabilir. Bu karma sistemleri düşünmek kolaysa da, tarif etmek o kadar kolay değildir. 6 - 12 karması bir sistem ortaya atacaksak, hangi basamaklarda 6 temel sayı ve hangi basamaklarda 12 temel sayı kullanabileceğimizi belirten bir kurala ihtiyacımız vardır. Yalnız 2 basamaklı sayılar için bile bu karma temel sayıları kullanan iki değişik sayı sistemi tasarlıyabiliriz: Siyah ve beyaz iki bilye düşünün. Beyaz bilye 12 temel sayının nöbetleşerek yerleşebileceği basamağı temsil etsin, siyah bilye de 6 temel sayınınkini. Bunlar sıraya dizilseler önce beyaz bilye ve sonra siyah bilye gelebilir veya önce siyah bilye sonra da beyaz bilye. Gördüğünüz gibi yalnız iki basamakla bile iki farklı sistem tasarlıyabiliriz. Birinde 6 temel sayı kullanılan basamak baştadır, diğerinde ise



Şekil 1. Düşünmek konusunda çoğumuz yiğitliğin 10 şartından 9 unu yerine getiririz.

12 temel sayı kullanılan basamak başta.

Başka bir örnek, 3 beyaz ve 2 siyah bilye alalım. Böylece 3 basamağında 12 temel sayı ve 2 basamağında 6 temel sayı kullanılabilen 5 basamaklı karma sayılar elde edeceğiz. Siyah ve beyaz bilyelerin yerlerini değiştirerek birçok karma sayı sistemleri ortaya atılabilir. Bunların sayısı ne kadardır?

Bu örnekte 5 içerisinden yapılabilecek bütün değişik 2 li seçimler kadar. Çünkü beş basamağın yerini işaretledikten sonra, bunları 2 şer, 2 şer mümkün olan bütün hallerde seçip her seferinde siyah bilyeleri oralara yerleştirebiliriz. Her Yerleştirme yapıldıktan sonra boş kalan 3 basamak beyaz bilyelerin yerini tayin etmiş olacaktır. Bu hesabın nasıl yapılacagını veren formülü biliyoruz (Bk. Bilim ve Teknik sayı 36), onu biraz ilerde de kullanacağız.

Sayı sistemlerinden alınacak ders: çarpma kuralı. Tekrar basit sayı sistemlerine dönelim. Bu temel sayıların adedi ve basamak adedi verilirse, o basamaklarla yazılabilecek bütün değişik sayıların miktarı kolaylıkla hesaplanır. Bu hesaplanan sayılarda piyango biletlerinde ve telefon numaralarında olduğu gibi 0 (sıfır) ile başlıyan sayılar da bulunur. Onlu sayı sistemi ile, 3 basamak kullanarak 000 dan 999 a kadar bin ($10 \times 10 \times 10 = 10^3$) farklı sayı yazılabilir. İki basamak kullanarak 00 dan 99 a kadar yüz ($10 \times 10 = 10^2$) değişik sayı yazılabilir. Eğer baştaki çift 0 (sıfır) sizi şaşırtıyorsa önce 1 den 99'a kadar olan 99 sayıyı bildiğiniz gibi sırasıyla yazın. Sonra da 1 den 9 a kadar olan sayıların herbirinin başına birer sıfır koyarak bunların basamaklarını da ikiye tamamlayın. Böylece birbirinden farklı 99 iki basamaklı sayı elde etmiş oldunuz. Başa ya da sona 00 eklediniz mi, bu temel sayılarla yazabileceğiniz bütün 2 basamaklı değişik sayılar 100 olur.

Şimdi söyliyeceğim kuralı hiç unutmıyasınız diye bunları uzun uzun yazdım. Bu kural gerek basit gerekse karma sayı sistemleri için geçerlidir.

Her basamakta kullanılabilen temel sayıların adedi birbirleriyle çarpılarak o basamaklarla yazılabilecek bütün değişik sayıların miktarı bulunur.

Örneğin 3 basamakla her sefer 10 temel sayı kullanarak $10 \times 10 \times 10 = 1000$, üç basamakla bir defa 10 temel sayı, iki defa 5 temel sayı kullanarak $10 \times 5 \times 5 = 250$ değişik sayı yazılabilir.

Hatırlamak için basit bir deney. Değişik sayı sistemlerinde durumun böyle olduğunu görebilmek için bir deney yapabilirsiniz : İki temeline göre iki basamaklı $2 \times 2 = 2^2 = 4$ sayı yazabiliriz. Bunu görmek için 00 dan 99 a kadar 10 temeline göre yazılmış 100 sayı bulunan bir cetvel hazırlıyalım — Ne duruyorsunuz? Beş dakikadan fazla zamanınızı almıyacaktır —. İkili sayı sistemlerinde 0 ve 1 temel sayıları kullanılıyor. Cetvelimizde bunların dışında —en az— rakamı bulunan sayıları çizelim, örneğin 04, 45 gibi. Yaptınız mı? Böylece 96 sayı çizmiş oldunuz. Çizilmemiş bu dört sayı kaldı. 00, 01, 10, 11. Şimdi deneyi 3 temelli sayılar için tekrarlıyalım. $3 \times 3 = 9$ sayı bekliyoruz. Gerçektende her iki basamagında da (0, 1, 2) sayılarından biri bulunanların dışındaki sayıları çizmekle 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22 elde eder ve sayılarının 9 olduğunu görürüz.

Bunun gibi 4, 5 ve 6 basit temelli ve (5 — 6) karma temelli sayılar için de deneyi tekrarlıyarak birinci halde on altı $(4)^2$, ikinci halde yirmi beş $(5)^2$, üçüncü halde otuz altı $(6)^2$ ve dördüncü halde otuz (5×6) değişik sayı elde edebileceğinizi görebilirsiniz.

Kaç farklı sayı yazılabileceğini hesaplamak için kullanılan temel sayıların şekli değil miktarı önemlidir. İkili sayı sistemini temsil eden sayıları 0 ve 1 olarak seçtik. Ama keyfimiz isteseçdi, seçtiğimiz iki işaret 2, 3 veya 4, 6, veya iki değişik kitap gibi, aklımıza gelen ve birbirinden ayrılabilen iki şey olabilirdi. Gene sonuç değişmezdi. Örneğin 2 ve 3 yardımıyla iki basamakla gene 4 sayı yazabiliriz: 22, 23, 32, 33. Gerek piyango biletlerinde, gerekse verdiğimiz zar örneklerinde, maksadımız için sayıların anlamları değil birbirlerinden ayrılabilen işaretler olmaları önemlidir. Zarın «6» işaretli yüzü için uyguladığımız bir problemi, zarın «1» işaretli yüzü veya herhangi başka yüzü için de uygulayabiliriz. Örneğin 3 atışta yalnız 3 defa 6 elde etmenin ihtimali ile 3 atışta yalnız 2 defa 1 elde etmenin ihtimali eşittir ve aynı şekilde hesaplanır. Her iki halde de zarın değişik şekilde işaretlenmiş birer yüzü söz konusudur.

Şimdi bir zarı 3 defa atarak sonuçları araya virgül koymadan kaydedelim. Örneğin, 623 önce 6, sonra 2, sonra da 3 geldiğini gösterir. Her atışta 6 değişik sayı gelebilirdi. Tıpkı 6 temeline dayanan sayıları rastgele seçerek rakam yazmakta olduğu gibi. 4 atışta veya 3 basamakla yazılabilecek bunun gibi bütün sayılar $6 \times 6 \times 6 = 216$ olur.

000 dan 999 a kadar olan bin sayıyı — sabrınız varsa — yazın. 1, 2, 3, 4, 5, 6 dışında en az bir rakamı bulunanları çizin, böylece bu rakamlarla yazılmış çizilmemiş 216 sayı elde edeceksiniz. Bu sayılar 3 defa bir zar atarak çıkabilecek bütün imkânları kapsar.

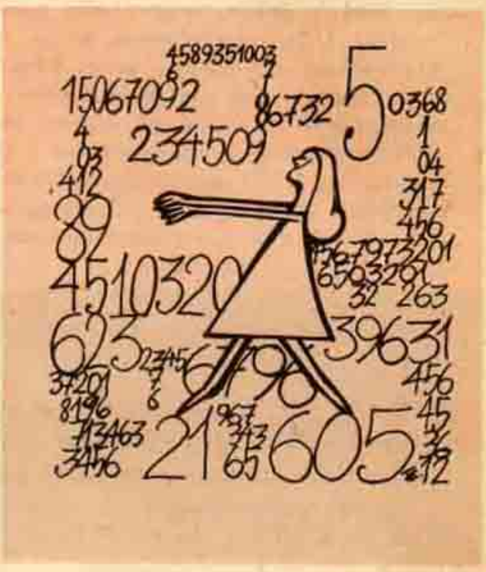
Kısıtlanmış imkânlar. Her zar atışında 6 imkân vardır. Bazı şartlar koyarak bu imkânları değişik atışlarda değişik şekillerde kısıtlarsak, 6 lı sayı sistemi yerine karma sayılı sistemlerin uygulanışına geçilir.

Örneğin bir zarla üç atışta yalnız iki defa 6 elde etme ihtimali nedir? sorusu, şu şekilde iki soruya çevrilebilir: Bir zarla 3 atış yapılarak elde edilebilen 216 ($= 6^3$) üç basamaklı bütün sayıların içinde kaç tane iki adet 6 lı sayı bulunur (örneğin 166, 636, 664)? Bu iki adet 6'lı sayıların miktarının, bütün 216 sayıya göre nisbeti nedir?

Durum sanki zarla 3 atışta gelebilecek imkânları kapsıyan 216 bilet içerisinde 2 adet 6 sı bulunanların kazanma ihtimalini araştırmak gibidir.

2 adet 6 sı bulunan biletlerin miktarını kârma sayılı sistemler yardımıyle hesaplıyabiliriz. Buradaki sistem 1 (bir) li ve 5 li sistemdir. Çünkü şartımıza göre basamaklardan ikisinde tek bir işaret — 6 işareti — üçüncüsünde 5 işaret kullanabiliyoruz. Bu 5 işaret zarın 6 dışındaki yüzlerinin numaralarıdır (1, 2, 3, 4, 5). Sonuç $1 \times 5 \times 1 = 5$ olur. Bu sonuç böyle karma sayı sistemlerinden ancak birine eşittir. Bilye misalinde anlattığımız gibi bunun gibi 2 sistem daha yazabiliriz. Örneğin beş temel sayının nöbetleşe girebildiği basamağı beyaz bir bilye ile, diğer tek şekilde doldurabildigimiz iki basamağı — 6 işareti — siyah bilyelerle gösterelim. Şu üç durum olabilir. Beyaz bilye başta, beyaz bilye ortada, beyaz bilye sonda. Bu sistemlerin her biri ile 5 değişik sayı yazılabildiği için sonuç $3 \times 5 = 15$ olur. Aradığımız ihtimal ise 15/216 dır. Bu 15 bilet şunlardır. Beyaz bilye başta (166, 266, 366, 466, 566); beyaz bilye ortada (616, 626, 636, 646); beyaz bilye sonda (661, 662, 663, 664, 665).

Bir seçim formülü. Benzer, fakat daha karışık durumlarda, karma temel sayıların basamak yerlerini değiştirmelerine göre kaç farklı karma sayılı sistem elde edilebileceğini hesaplamak için, n şey (basamak adedi) içerisinden her seferinde r şey (aynı adet temel sayıyı kullanabilen basamakların miktarı) seçilerek kaç farklı seçim yapılabileceğini gösteren aşağıdaki formülü kullanırız :



Şekil 2. Sayılar diyarında çoğu zaman uyurgezerler gibi dolaşıyoruz.

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Bu formülün elde edişi 36 ncı sayıda verilmiştir. İleriki yazılarda bir daha verilecektir. Buradaki örnekte n=3, r=2 (6 ihtiva eden iki basamak). Yerine koyarsak, sonuç $\frac{3!}{2! \times 1!} = 3$ olur. (Ünlem işareti için Bk. Bilim ve Teknik, sayı : 35).

Çarpma kaidesinin nedeni. Karma olsun veya olmasın, yazılabilecek sayıların hesaplanmasında, her basamak içine girebilecek temel sayıların adetlerinin çarpılmasının sebebi şudur: İlk basamağa girebilecek temel sayıların yardımıyla, o temel sayıların adedi kadar değişik tek basamaklı sayı türetebiliriz. İkinci basamaktaki temel sayıların her birini, birinci basamaktaki sayıların her birinin yanına nöbetleşe getirerek, bunların her birinden, ikinci basamaktaki temel sayılar kadar, yeni sayılar türetebiliriz. İki basamaklı sayılara, 3 ncü basamaktakileri aynı şekilde eklemekle onların her birinden de, 3 ncü basamaktaki sayılar kadar yeni sayılar türetebiliriz. Yeni yeni basamakların eklenmesiyle bu iş aynı şekilde devam eder. İki basamaklı sayılar için sonuç (birinci basamaktaki temel sayı adedi) X (ikinci basamaktaki temel sayı adedi) olur. Üçüncü basamağın eklenmesiyle bu sonuç, 3 üncü basamaktaki temel sayı adedi ile çarpılır. Örneğin, birinci basamakta üç (0, 1, 2), ikinci basamakta dört (0, 1, 2, 3) temel sayı kullanılabilsin. Birinci basamaktaki 0 (sıfırın) yanına ikinci basamaktakiler nöbetleşe gelerek 00, 01, 02, 03 sayılarını türetebiliriz. Aynı şekilde birinci basamaktaki 1 (bir) den 10, 11, 12, 13 dörtlüsü elde edilir. Birinci basamaktaki 2 adet de 20, 21, 22, 23 sayılarını elde edebiliriz. 4 lü 3 grup elde ettiğimizden sonuç 3 X 4 = 12 olur.

Bir kimya ve bir fizik kitabını, 3 fizik ve 4 kimya kitabı arasından kaç farklı şekilde seçebiliriz diye sorsaydık, gene aynı hesabı yapacaktık. Fizik kitapları, 3 temel sayılı, kimya kitapları 4 temel sayılı sistemlere benzetilebilir.

Niye mi sayıları uyur gezerler gibi kullanıyoruz dedim? Sayıları tetkik ederek bir çarpma kuralı elde edilebileceğini fark etmiş mi idiniz?

Problemler

1) Spor totoda bir sütun doldurarak herhangi 7 sonucu tutturma ihtimali nedir? (Oyun hakkında hiçbir bilgimiz olmadığı kabul ediliyor).

2) Türk alfabesiyle, başta sessiz harfler gelmek üzere, bir sesli ve bir sessiz harf kullanarak kaç farklı hece yazabiliriz? Bu problem hangi karma temelli sayıya örnektir?.

Geçen sayıdaki problemler ve cevapları :

Bu problemleri birlikte gözönünde tutmak yerinde olur. Bu problemleri vermekten amaç sayı sistemini değiştirmekle elektronik beyinde nasıl lamba (veya anahtar) ekonomisi yapılabileceğini anlatmaktı.

Onlu ve ikili sayı sistemine göre çalışan elektonik beyinlerin bin farklı durumu ifade edebilmek kabiliyetinde olabilmeleri için kaç lambaya ihtiyaç olduğu sorulmuştu. Onlu sayı sistemine göre 1000 fark ifade edebilmek için 3 basamağa (10^3 = 1000) ihtiyacımız vardır. Her basamakta temel sayılara karşılık olarak 10 lamba kullanıldığı için lamba ihtiyacı 30 olur.

Halbuki 2 li sayı sisteminde her basamakta tek lamba kullanarak 2 durum ifade edebiliriz: cereyan geçmez (0), cereyan geçer (1). Bin değişik durum için 10 basamağa (2^{10} = 1024) ve dolayısıyle 10 lambaya ihtiyaç vardır. Böylece sistem değiştirmekle 30 yerine 10 lamba kullanmış olduk.

OKUYUCULARIMIZA

Üçüncü cildin cilt kapakları ve 1-36 sayılara ait indeks baskıdadır, çıkacağı tarihi ayrıca ilân edeceğiz. Birinci ve ikinci cilde ait sayılar ve ciltler azalmaktadır. Elimizde 5 nci sayı kalmamıştır. Koleksiyon meraklısı okuyucularımıza acele etmelerini tavsiye ederiz.