DÜŞÜNMEK YA DA DÜŞÜNMEMEKTE DİRENMEK

BEKLEDİĞİMİZ FORMÜL

Dr. Herman AMATO

Çizgiler: **Ferruh DOĞAN**

Kırılmıyan Yelpaze. On sene garantili yelpazenin hikâyesini bilmiyen yok gibi: Bir iki salladan sonra yelpaze kırılınca, yelpazeci: «Tabii böyle kullanırsanız kırılır. Yelpazeyi düz tutup kafanızı saga sola sallıyacaktınız» demiş. Bunun gibi bizim buradaki yazılar da düşünmeyi garanti ediyor. Bir şartla, okurken yaprakları değil, kafanızın içini oynatacaksınız.

Kitaptan okuyarak da pekala araba kullanmasını öğrenebilirsiniz. Kitapla beraber arabaya binersiniz. Tarife göre kontak anahtarını çevirir, gaza basarsınız. Sonra yapacaklarınızı öğrenmek için bir yandan kitaba bakar ve aynı anda yolu gözlersiniz. Eğer yalnız direğe tosladınızsa hafif atlattınız demektir. Geçmiş olsun!

Şüphesiz çoğunuz bunun saçma olduğunu, araba kullanmanın uzun süren egzersizlerden sonra mümkün olduğunu bilir. Çoğumuzun iyi bilmediği şey kafayı kullanabilmek için çalışma ve egzersizin şart olduğu. Eğer yazıları istediğiniz derecede anlamamışsanız ne kendinizde ne de yazılarda kabahat bulun. «Kâfi derecede alıştırma yaptım mı?» diye sorun kendinize. Alıştırmalara verdiğiniz zaman araba kullanmıya veya dans öğrenmiye verdiğiniz zamanla kıyaslanabiliyor mu? Problemleri çözmeye yanaştınız mı? Yoksa bir iki denemeden sonra derhal mağlubiyeti mi kabul ettiniz?

İşte beklediğimiz formül. Bu formül son derece önemlidir. Karşınıza çıktığı anda, korkudan kendisine bakmadan sayfayı çevirmek alışkanlığınız olmasa ne kadar sık karşınıza çıktığına şaşıp kalacaksınız. Zar oyunlarından başlayın at yarışlarına geçin, ya da doğumla ilgili hesaplar yapın, iş hayatınıza da uygulayın, bunlar yetmedi ise bir karışım içerisindeki maddeler nasıl birbirinden ayrılır? diye sorun, hep o formülü karşınızda bulacaksınız. Ünlem işaretleriyle çevrili olması bir yana, son derece sevimli bir formüldür. Eğer bakmıya cesaret ederseniz çok seveceksiniz. Zaten bütünü üç harften yapılmış p, n, r; bu harflerin anlamlarını kavradınız mı? sırtınız yere gelmez. Bilim ve Teknik sayı 35'teki problemleri gözden geçirin, 36 daki çözümlere bakın. Aynı problemler bu söylediğimiz formülle çözülebilir.

Size bir anahtar verelim : 6 elde etme ihtimaline p, 6 dışında bir sayı elde etme ihtimaline (1 - p) diyelim. Atış adedine n, bu atışlarda 6 elde etme sayısına r diyelim, bunların yardımıyla bu formülü kendiniz bulmaya çalışın. Yapamadınızsa okumaya devam edin.

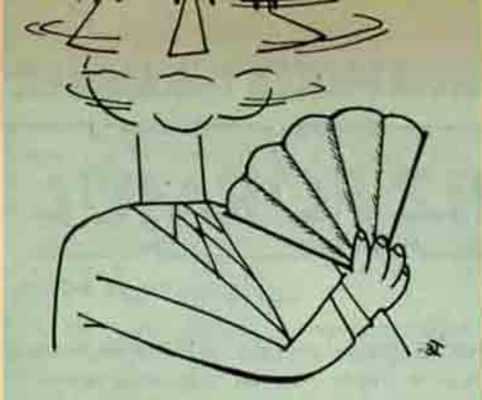
Gene sayı sistemleri. Önceki yazılarımızda (sayı 37 ve 38) bir çarpma kaidesi —aklınızdan çıkmasın diye— çeşitli sayı sistemleri örnek verilerek anlatılmıştı:

Her basamakta kullanılabilecek olan temel sayıları ayrı ayrı sayarsınız. Bunları birbirleriyle çarparsınız. Böylece bu basamaklar yardımıyle yazabileceğimiz bütün değişik sayıları hesaplarsınız. Bu karşımıza çıkabilecek bütün imkânların sayısını verir. Adi sayılarda, her basamakta 10 temel sayı kullanabildiğimiz için 2 basamak yardımıyla 100 değişik sayı yazabiliriz.

Zarın, paranın yüzlerinin sayıları çeşitli temel sayılı sistemler seçmemize imkân verir. Zar 6 lı, yazı-tura 2 li sisteme karşılıktır. Atış veya deneylerin sayısı yapılacak hesapta basamak adedini veriyordu. Örneğin zar 6 yüzlü olduğundan her basamakta 6 temel sayıdan birini kullanabiliyorduk. 5 atışta 5 basamaklı bir sayı elde ederiz. 6 lı sayı sisteminde 5 basamakla yazılabilecek bütün sayılar $(6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^5 =)$ 7776 kadardır. Temel sayı 6, basamak adedi (veya atış adedi) kadar defa yazılıp bunlar birbirleriyle çarpılıyor. Demek ki bir zarı 5 defa atsak bu 7776 durumdan biri muhakkak karşımıza çıkacaktır. Bu 7776 durumu ihtiva eden liste bir zarla 5 atışta gelebilecek bütün halleri kapsamaktadır. Bu haller tıpkı piyango biletlerinde olduğu gibi numaralarla gösterilebilir: Örnegin, 111654 sırasıyle 1,1,6, 5 ve 4 yazılı zar yüzlerinin 5 atışta karşımıza çıktığını gösterir.

Elimizdeki biletlerin bütün biletlere oranı, kazanma şansımız hakkında bilgi verir. Çıkabilecek bin durumu gösteren 1000 bilet içinden, 100 tanesi elimizde ise kazanma şansımız 100/1000 = 1/10 dur.

Problemlerde bizi ilgilendiren bilet adedi çoğu zaman doğrudan doğruya verilmez: Örneğin «bir zarla 5 atışta 2 defa 6 elde etmek istiyo-



Şekil 1. Garantili yelpaze değil garantili eğitim.

ruz» demekle, «1 den 6 ya kadar temel sayılarla yazılmış 5 basamaklı biletlerin içerisinde 2 adet 6 sı bulunanların (66532 de veya 63164 de olduğu gibi) sayısı nedir?» demek aynı şeydir.

Bu biletlerin adedini hesaplamak için her basamakta kaç temel sayı kullanabilceğimizi araştırmalıyız. İki basamağı ancak bir şekilde doldurabiliriz. Çünkü bu basamaklara 6'dan başka bir sayı yerleştiremeyiz. Diğer 3 basamakta 6'nın dışındaki (1 den 5 e kadar) 5 sayıyı kullanabildiğimizden bu basamaklar 5 değişik şekilde doldurulabilir. Böylece 2 adet 6 elde etmek şartımız yerine getirilmiş olur. Özetlersek iki basamakta birer ve üç basamakta beşer tmel sayı kullanıyoruz. Bunları çarparsak $1X1X5X5X5=1^2X5^3=125$ buluruz.

Unutulmaması gereken değişik sıralanmalar. Bu 125 örneğin, 66... (noktaların yerine 1 den 5 e kadar sayılar nöbetleşe gelebilir) şemasına göre yazılabilecek biletlerin adedidir. Yani baştaki 66 yı sabit tutar, geri kalan 3 basamağı 1 den 5 e kadar sayılarla nöbetleşe doldurursak, 66 ile başlıyan 125 değişik bilet elde ederiz. Birinci noktanın yeri 1 den 5 e kadar sayılarla 5 degişik şekilde doldurulabilir, böylece beş sayı elde ederiz. Bu beş sayının her birinden ikinci noktayı 5 farklı şekilde doldurarak 5 er sayı ve sonuç olarak 25 sayı elde ederiz. Gene bu 25 sayının 3 üncü noktalarını 5 er farklı şekilde doldurabileceğimizden, bunların hepsinden 125 sayı elde ederiz.

Oysa iki defa 6, değişik şemalarda elde edilebilir, 6.6.. örneğinde olduğu gibi. Bu örnekte birinci ve 3'ncü atışlarda 6 gelmiştir. 6 dışındaki basamaklar gene 5 er farklı şekilde doldurulabileceğinden buradaki durum da 125 bilet verir ($1X5X1X5X5 = 1^2 X 5^3 = 125$)

Aklımıza şu sual gelir: Bunlar gibi kaç değişik şema elde edebiliriz?

İki adet 6, 5 yere yerleşebildiğinden (5 basamağın yeri), bu beş yeri 2 şer, 2 şer değişik şekillerde seçerek 6 ları yerleştirebiliriz. O halde 5 içinden yapılan 2 li seçimlerin sayısı kadar değişik şemalar elde edebiliriz. Bu seçimlerin sayısını veren formülü biliyoruz. Biraz ilerde tekrar ispatlıyacağız :

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} \quad n=5; \ r=2 \text{ yerine koyarsak}$$

$$\frac{5!}{2!X3!} = \frac{5X4X3X2X1}{(2X1) X (3X2X1)} = 10$$

Demek ki 5 basamağa (.....) 2 adet 6 yı şu 10 değişik şekilde yerleştirebiliriz : 66..., 6.6.., 6..6., 6...6, .66.., .6.6., .6..6, ..66., ..6.6, ...66.

Aranan ihtimal. O halde şartımızı dolduran bütün biletler 10 X 125 = 1250 dir. 1250 yi şu işlemlerle elde ettik 10X1X1X5X5X5. Bütün 5 zar atışında yapılabilecek durumları kapsıyan 7776 (= 6X6X6X6X6) bilet içinde şartımızı dolduran 1250 biletten birini elde etme ihtimali 1250/7776 dir. Biraz ileride vereceğimiz değişik bir hesap yolunun aynı işlemlerle neticeleneceğini görebilmeniz için bu oranı işlemler görülebilecek şekilde veriyoruz :

$$10 X \frac{1 X 1 X 5 X 5 X 5}{6 X 6 X 6 X 6 X 6}$$

Değişik bir hesap yolu ve formülün yarısı. Bu ihtimali şu şekilde hesapladık: Önce bir zarı 5 defa atarak elde edecegimiz bütün durumların kaç tane olduğuna baktık (6X6X6X6X6), sonra bunların içinde şartımızı dolduranların sayısını hesapladık (10X1X1X5X5X5). Sonunda bu iki sayıyı, şartımızı dolduranların nisbetini gösterecek şekilde oranladık. Aynı iş değişik bir sırada yapılabilirdi; işlemler gene aynı kalacağından sonuç değişmezdi : Her bir atış için ayrı ayrı zarın şartımızı dolduran ve bütün yüzlerini sayar ve bunları oranlardık. Böylece her atışın ihtimali ayrı ayrı hesaplanmış olurdu. Bunlar birbiriyle çarpılırdı. Ayrıca bizi ilgilendiren 6 yazılı yüz değişik sıralarda gelebileceğinden sonuç bu sıraların adedini veren ve seçim formülünden elde edilen 10 sayısı ile çarpılırdı. Böyle yapsaydık 2 defa elde ettiğimiz 1/6 yı ve 3 defa elde ettiğimiz 5/6 yı birbirleriyle ve değişik sıralanma adedi 10 ile çarpacaktık (10 X1/6 X1/6 X5/6 X5/6 X5/6). Bu hesaplanma tarzı basit ihtimallerin yardımıyla daha karışık durumları hesaplamıya imkân verir. Önceki yazılarımızda VE, VEYA bahisleri altında bunlardan uzun uzun bahsettik. 6 dışındaki 5 yüzün sayısı 5, zarın 6 yüzünden bizi ilgilendiren biri çıkarılarak elde edildiğinden 6-1 şeklinde düşünülebilir ve 5/6 oranı şu şekilde yazılabilir.

$5/6 = (6\text{-}1)/6 = 6/6 - 1/6 = 1 - 1/6.$

Genel bir ifade elde etmek için 1/6'ya p dersek 5/6 yukarıdan anlaşılacağı üzere 1 — p şeklinde gösterilebilir. 1/6 yı 2 defa ve 5/6 yı 3 defa yazıp çarparak elde edebileceğimiz $1/6 \times 1/6 \times 5/6 \times 5/6 \times 5/6 = (1/6)^2 \times (5/6)^3$ ifadesi ise genel olarak

$$p^2 \, (1\text{-}p)^3$$

şeklinde gösterilir. Eğer 5'e genel olarak n (buradaki 5 atış sayısını göstermektedir) ve 2'ye genel olarak (burada 2 elde etmek istediğimiz 2 adet 6 atışlarını göstermektedir) dersek 6 lar dışındaki 3 (= 5 — 2) atışın sayısını (n - r) şeklinde gösterebiliriz. Böylece formül daha da genel bir şekil alır.

$$p^r(1 - p)^{(n-r)}$$

Bunlar hatırlıyacagınız üzere VE halleridir. Çünkü gelmesini istediğimiz hallerin ihtimalleri birbirleriyle çarpılmıştır. Böylece formülün yarısını elde etmiş olduk. Diğer yarısı çeşitli sıralanmalara bağlı çeşitli VEYA ile ifade edilebilecek durumların sayısını hesaplamaya yarayan seçim formülüdür.

Formülün ikinci yarısı ve renkli elbiseli kızlar. Seçim formülünü hiç unutamıyacağınız bir şekilde anlatmak istiyoruz. 5 basamağa veya atışa verebileceğimiz sıra numaraları yerine daha cacip olsun diye 5 değişik renkli elbise giymiş kız koyalım. Bunlar 5X4X3X2X1 veya kısaca 5! farklı şekilde sıralanabilir. Aynı kız bir sırada kendi yanına gelemiyeceği için evvela 5 kızın her birinin yardımıyle 5 tane birli sıra elde edebiliriz. Bu beş birli sıranın her birinden dörder tane ikili sıra elde edebiliriz. Bu, her kızın yanına kendi dışındaki dört kızın nöbetleşe gelmesi ile olur. Böylece ikili sıralar 20 (=5X4) olur. Bu 20 ikili sıradan, bu sefer 3 kız nöbetleşe gelerek, 60 (=5X4X3) üçlü sıra, bu 60 üçlü sıradan, geri kalan iki kızın yardımıyle, 120 (=5X4X3X2) dörtlü sıra ve bu 120 dörtlü sıradan tek kızın eklenmesiyle sonunda gene 120 (= 5X4X3X2X1 = 5!) 5'li sıra elde ederiz. Kuralı öğrendik, unsurların sayısının yanına bir ünlem işareti koyduk mu o unsurlarla yapılabilecek sıra adetlerini buluruz. Ünlem işaretinin bir sayının yanına gelmesinin, 1 den o sayıya kadar olan rakamların çarpılacağı anlamına geldiğini belki de tekrarlamıya lüzum yok.

Düşten yapılmış bir köprü. Şimdi hayalimizde bu 120 adet beşli sırayı canlandırıp bunları askerlerin yaptığı sıralar gibi düşten yapılmış bir köprü üzerine dizelim. Köprüye önden bakınca yanyana sıralanmış 5 kızdan ibaret bir sıra ve yandan bakınca bunun benzeri 120 sıra göreceğiz. Soldan sağa 1 nci ve 2 nci kızları, bütün sıralarda yanlarındaki 3 kızdan ayıralım. Öyle ki arka arkaya dizilmiş 120 ikili ve gene arka arkaya dizilmiş 120 üçlü sıra elde edelim. Hayali bir emirle üçlü sıralar köprüden çekilip sis gibi dağılsınlar. Böylece 5 içinden 2 şer 2 şer seçilmiş kızlardan müteşekkil 120 sıra elde ederiz. Bu 120 sıra 5 üzerinden yapılabilecek bütün ikili seçimleri ihtiva eder. Bunun dogru olduğunu göstermek için 5 ten seçilmiş herhangi 2 kızın bu 120 sırada bulunacağını gösterelim. Bu iki kızın sağına geriye kalan 3 kızı koyarak bir beşli sıra elde edebiliriz. Bu yeni elde ettiğimiz sıra 5 kızdan yapılmış 120 sıradan biri ile çakışmalıdır. Çünkü 120 beşli sıra bu kızların yapabileceği bütün sıraları kapsamaktadır. Bütün diğer ikili seçimler için de aynı şekilde düşünebileceğimizden, 120 ikili sırada 5 ten yapılmış bütün ikili seçimlerin mevcut olduğunu kabul etmiye mecburuz.

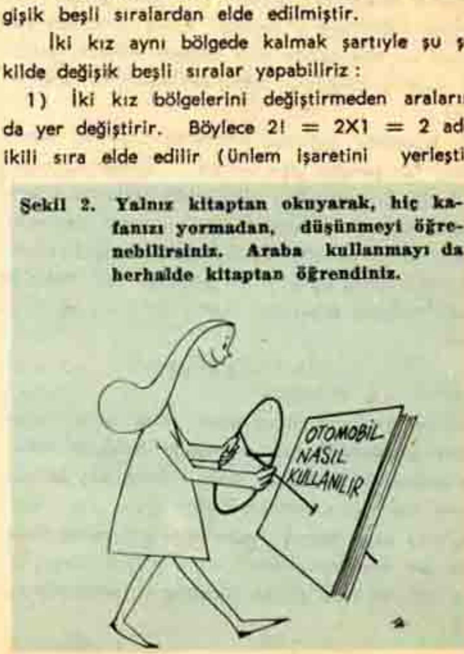
Ancak şu mesele kalıyor: Herhangi bir seçim (örneğin kırmızı ve yeşil elbiseli iki kız) bu 120 ikili sırada kaçar defa tekrarlanıyor. Eğer herbir seçimin tekrarlandığı bu sayıyı bulur ve 120 yi buna bölersem, değişik seçimlerin adedini bulacağım.

İki kızın tekrar sayısını bulmak için garip bir yol. Bu tekrar sayısını bulmak için belirtilmiş iki kız aynı bölgede (örneğimizde sol baştaki bölge) kalmak şartıyle kaç değişik beşli sıra elde edebileceğimizi araştıralım. Çünkü bu iki kız değişik beşli sıralardan elde edilmiştir.

İki kız aynı bölgede kalmak şartıyle şu şekilde değişik beşli sıralar yapabiliriz :

1) İki kız bölgelerini değiştirmeden aralarında yer değiştirir. Böylece 2! = 2X1 = 2 adet ikili sıra elde edilir (Ünlem işaretini yerleştir-

Şekil 2. Yalnız kitaptan okuyarak, hiç kafanızı yormadan, düşünmeyi öğrenebilirsiniz. Araba kullanmayı da herhalde kitaptan öğrendiniz.



mekle sıra adedini bulacağımızı biraz önce söylemiştik).

2) Geriye kalan 3 kız kendi bölgelerinde kalarak aralarında yer değiştirebilirler. Böylece bunlardan da 3! = 3X2X1 = 6 sıra elde edilebilir.

3) Bu 2 (= 2!) adet ikili sıranın herbiri nin yanına 6 (= 3!) adet üçlü sırayı nöbetleşe getirerek 12 (=2X6 = 2!X3!) 12 adet beşli sıra elde ederiz.

Bu 12 beşli sırayı hayalden imâl edip düşten yapılmış köprünün altına yerleştiririz. Bu köprünün bölüm çizgisini temsil ettiğini hemen anladınız değil mi?

Demek ki köprünün üzerinde bulunan 120 (= 5!) ikili sırada her bir seçim 12 (= 2!X3!) defa tekrarlanıyor. Beşten yapılacak değişik ikili seçimlerin adedini bulmak için 120 (= 5!)'yi 12 (= 2!X3!) ye bölmek lâzımdır.

$$\frac{120}{12} = \frac{5!}{2! \times 3!}$$

Genel bir ifade elde etmek için 5'e n, 2'ye r dersek, 3 (=5-2) (n-r) şeklinde gösterilebilir. Yukardaki ifade şu genel şekli alır:

$$\frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

Aradığımız seçim formülünü bulduk. Pay'da n kızın yaptığı bütün sıralar yani n! ve paydada bunlardan r tanesinin ayrılması ile elde edilen r ve (n-r) adetteki kızların yapabileceği sıraların çarpımı vardır (r! X (n-r)!). Bilindiği gibi bu çarpım belirtilmiş r sayıdaki kızın, n kızdan yapılmış n! sıra içinde aynı bölgede kalmak şartiyle —seçim bölgesi— tekrarlanmalarının adedini verir.

Formülün tamamı. Formülün birinci yarısı belirli bir şemaya göre — 66 ... örneğinde olduğu gibi — şartımızın elde edilîş ihtimalini veriyordu. Değişik şemaların sayısını şimdi ispatladığımız seçim formülü ile bulduğumuzdan, bu ihtimali bu seçim formülü ile çarparak tam ihtimali veren formülü buluruz:

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\, p^{r}(1-p)^{(n-r)}$$

n'in iki kısma ayrılmasından elde edilen r ve (n-r) ifadelerinin hem paydada hem de üstler de bulunduğuna dikkat edin. Formülün birinci kısmı bir seçim formülü ikinci kısmı ise ihtimallerin çarpılmasını kısaltılmış bir halde ifade eden bir kısmıdır. Birinci kısım VEYA, ikinci kısım VE ile ifade edilen durumların ihtimallerini hesaplamıya yardım eder. p, ilgilendiğimiz olayın ihtimali, örneğimizde 6 elde etme ihtimali $\left(\frac{1}{b}\right)$ (1 — p), ilgilendiğimiz olayın dışındaki olaylardan herhangi birini elde etme ihtimallerinin toplamış (örneğimizde 6 dışındaki 5 herhannin toplamı (örneğimizde 6 dışındakı 5 herhangi birini elde etmenin ihtimallerinin toplamı $\left(\frac{5}{6}\right)$ n, deney adeti (örneğimizde atış adedi 5)

r, n deney içinde istediğimiz olayın çıkmasını şart koydugumuz adet (örneğimizde 2). Yalnız bu formülü öğrenmek yetmez bunu çeşitli problemlere uygulamak alışkanlığını da kazanmak lâzımdır. İkinci yazımızda (Bilim ve Teknik sayı 33) bahsettiğimiz 245 sayfalık kitap bu formülü anlatmak için yazılmıştı.

Eğer anlamadınızsa üzülmeyin evvelki bahisleri tekrar tekrar okuyun ve bu formülün nerelerde geçtiğini araştırın, tüm formülü kavrayıncaya kadar.

PROBLEMLER

1) Beş kız ve beş erkekten yapılmış on kişilik bir gruptan kaç farklı şekilde ikili seçimler yapabilirsiniz?

2) 5 kız ve 5 erkek aralarında kaç farklı evli çift meydana getirebilir?

3) Üç kız ve 2 oğlandan ibaret 5 çocuklu aileler kaç farklı şekilde meydana gelebilir?

GEÇEN SAYIDAKİ PROBLEMLERİN CEVAPLARI

1) Spor totoda 3 değişik doldurma şekli olduğundan, bütün yazılabilecek çeşitli haller 3^{13} tür. Şartımızı dolduran biletlerin 7 bölgesi ancak tek şekilde doldurulabilir. Kazanan tahminlere uygun olarak. Geriye kalan 6 bölge 2 şer şekilde doldurulabilir. Doğru tahminin dışındaki iki tahmin. Böylece $1^7 \times 2^6$ değişik bilet doldurabiliriz. Bu sayı ancak bir tek şemaya göre doldurulan biletlerin adedini verir. 13 den yapılabilecek 7 li seçimler kadar değişik şemalar vardır.

Bu seçimlerin adedi $\frac{13!}{7! \times 6!}$ kadardır. Şartımızı dolduran biletlerin sayısı $\frac{13!}{7! \times 6!} \cdot 1^7, 2^6$ olur. Bunu bütün biletlerin adedine bölersek yani 3^{13}'e, aradığımız 7 tutturma ihtimalini buluruz.

2) Türk alfabesinde 20 sessiz ve 8 sesli harf olduğundan, başta sessiz harf gelmek şartiyle 20 X 8 = 160 iki harfli hece yazabiliriz. Bu problem karma sayıların kullanılmasına örnektir. Burada 20 ve 8 temel sayı kullanılmaktadır.