

# HİÇ TANIMADIĞIMIZ SAYILAR

Dr. Herman AMATO

Çizen: Ferruh DOĞAN

**S**ayılar başka bir açıdan bakınca, sonuçları bizi şaşkınlığa uğratmış olan birçok problemin, çok eskiden bildiğimiz, aşına olduğumuz sayılar sıra fikrini ya da büyüklük fikrini vermek yolların bazı özellikleri yardımıyla kolaylıkla çözülebildiğini görürüz.

Bu kez tekrar şaşkınlığa uğrar. «Bu iş bu kadar basit mi idi? Sayılar hakkında bilgilerimiz bu kadar az mı idi?» diye düşünürüz.

Örneğin 7 kişi kaç farklı sıra yapabilir?

6 mı? 21 mi? Yoksa 5040 mı? (5 dakika düşünün).

Doğru cevap 5040 tır. «Ne kadar çok!» diye şaşıntınız mı? O halde bildiğimiz sayılarla en çok 7 basamak kullanarak 10 milyon farklı sayı yazabildiğimize büsbütün şaşırıp feryadı basmanız gerekir. 0 (sıfır) dan başlayarak 9 999 999 a kadar olan sayıları yazın ve sayın tam 10 milyon bulacaksınız (1 den 9 999 999 a kadar 9 999 999 sayı, bir de sıfırı eklersek tam 10 milyon eder).

**Sayılar başka bir gözle bakış.** Bildiğiniz gibi amacıyla kullanılır. Bunların dışında üzerinde hiç durulmadan geçilen çok geniş bir kullanım alanı daha vardır: bu da isimlendirmede ya da daha doğrusu cisimlerle birbirlerinden ayırt etmek için sayıların kullanılmasındadır. Her karar bir seçimdir. Ve seçebilmek için birinci şart ayırt edilebilirdir. Bütün seçimler ayırt edilebilen şeyler arasında yapılabilir. Bu cisimlerin her birinin yerine bir sayı koyarak, cisimlere uygulayabileceğimiz matematik işlemleri sayılar üzerinde daha kolaylıkla uygulayabiliriz. Örneğin iki telefonu, iki piyango biletini, iki benzer arabayı, iki ikiz askeri, öğrenciyi üzerindeki numaralar yardımıyla ayırt edebiliriz. Öğrencileri veya arabalara tatbik edebileceğimiz problemleri, onları temsil eden sayılara da uygulayabiliriz.

**Ayırt edilmesi gereken iki tip sayı.** 134687, 132255. Bu iki sayıya dikkatle bakın! Büyüklük ve rakkam değişikliği gibi farkların üzerinde dur-

mayın. Aralarında ne gibi temelli bir fark olduğunu bulmaya çalışın. (5 dakika düşünün).

Birinci sayıda aynı rakkam değişik basamaklarda tekrarlanmamıştır. Oysa ikinci sayıda 2 ve 5 rakkamları ikişer defa tekrarlanmıştır.

0 dan 9 a kadar numaralanmış 10 bilye bulunan bir torbadan 5 bilye çeksek ve sonuçları virgül gibi işaretler koymadan sırasıyla kaydersek, 5 basamaklı bir sayı elde ederiz. Örneğin sırasıyla 1,3,6,9 ve 5 gelirse, 13695 sayısını elde ederiz. Burada her çekimden sonra bilyeler tekrar torbaya konulmamıştır. Eğer her çekimden sonra bilyeleri yerine koyarsak, tekrar aynı bilyeyi çekebileceğizden, 5 çekimde basamaklarında aynı rakamların tekrarlandığı 5 basamaklı sayılar elde edebileceğiz (örneğin 01034). Birinci halde her çekimden sonra ihtimal değişir: Önce 10 bilye arasından çekiyoruz, birini bulma ihtimali 1/10 dur. Birini çektikten sonra geriye kalan 9 bilyeden birini bulma ihtimali 1/9 olur. 2. nci çekimden sonra geriye kalan 8 bilyeden birini bulma ihtimali 1/8 dir. Bilyeler bitene kadar bu iş böyle devam eder. Oysa bilyeleri her seferinde iade edip çekim yaparsak ihtimal değişmez, birini bulma ihtimali de 1/10 dur.

**6 basamak ve telefonlar.** Bilindiği gibi İstanbul'da telefon numaraları 6 basamaklı sayılardan yapılmıştır. Başa sıfır da gelebilir; 004455 gibi bir telefon numarası yadırganmaz. Şimdi 6 basamak yardımı ile kaç değişik telefona numara verebileceğimizi ve şebekenin kaç telefon alabileceğini hesaplayalım. Birinci basamağa 10 değişik rakkam gelebilir (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9). Örnek olarak birinci basamağın 0 ile başladığını farzedelim. Bunun yanına ikinci bir basamak eklemekle bundan kaç tane iki basamaklı sayı türetebiliriz? Gene 10 (00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09). O halde bütün tek basamaklı 10 rakkamdan ikinci basamak yardımıyla onardan yüz (10<sup>2</sup>) iki basamaklı sayı elde ederiz. Herhangi bir sayıdan bir

basamak eklemekle aynı şekilde on sayı türetebildiğimiz için, yüz 2 basamaklı sayıdan bin ( $10^3$ ) 3 basamaklı sayı; bin, üç basamaklı sayıdan on bin ( $10^4$ ) 4 basamaklı sayı; On bin, dört basamaklı sayıdan yüz bin ( $10^5$ ) 5 basamaklı sayı ve nihayet yüzbin, 5 basamaklı sayıdan 1 milyon ( $10^6$ ) 6 basamaklı sayı elde ederiz.

Yani 6 basamak yardımıyla ancak bir milyon telefona numara verebiliriz. Rastgele 6 defa sinyal vererek aradığımız numarayı bulma ihtimalim milyonda birdir. Piyango biletlerinin 6 hanesinde 0 dan 9 a kadar bütün rakamların kullanılmasına müsaade edildiği hallerde, piyango bileti için de durum aynıdır. Yani büyük ikramiyeyi kazanma şansı milyonda birdir. Şimdi bu bir milyon numara içerisinde kaç tanesinin, değişik basamaklarında, aynı rakamların tekrarlanmadığı sayılar grubuna girdiğine bakalım (örnek 64 71 90).

**Değişik basamaklarında aynı rakamın tekrarlanmadığı telefon numaraları.** Eger aradığımız telefon numarasında aynı rakamın tekrarlanmadığını bilsem, rastgele değişik yerlere basarak 6 sinyal vermek suretiyle istediğim numarayı bulma ihtimalim ne kadardır?

Bu soruya cevap verebilmek için bir milyon numara içinde kaçının değişik basamaklarında aynı rakamın tekrarlanmadığını bulmalıyız.

Şöyle bir çözüm yolu düşünebiliriz :

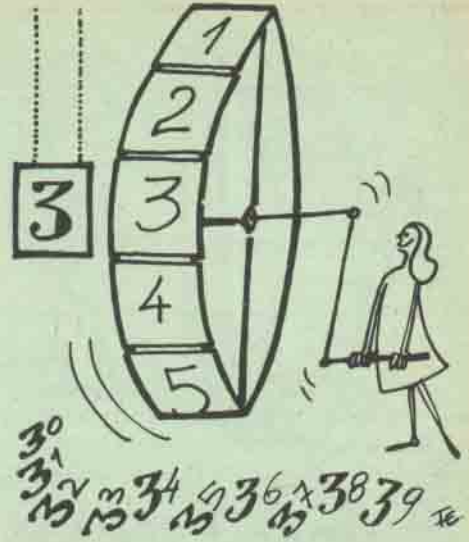
a) Mademki 6 basamakta değişik rakamlar kullanacağız, yazacağımız her sayı için 6 değişik rakamda istifade etmeliyiz. Bu 6 rakam 0 dan 9'a kadar olan 10 rakam içerisinde çeşitli şekillerde seçebiliriz.

Örneğin 1, 7, 5, 4, 3, 2 veya 0, 9, 8, 7, 5, 2 gibi değişik seçimler yapılabilir. (iki seçimin değişik olması için aralarında bir tek fark yeter). O halde önce 10 sayı üzerinden yapılabilecek bütün 6 lı seçimlerin sayısını bilmeliyim.

b) Her bir 6 lı seçimden rakkamların sırasını değiştirerek (örneğin 174523, 754231, 132457) kaç farklı numara elde edebileceğimi hesaplamalıyım. Nihayet bu sonucu değişik seçimlerin adediyle çarpmalıyım.

Bu yol akla yakınsa da çözümü güçtür. 10 üzerinden yapılabilecek 6 lı seçimlerin sayısını bulmak için basit bir yol bilmiyoruz.

Şimdi problemi daha basit bir yoldan çözüp, 10 üzerinden yapılabilecek bütün 6 lı seçimlerin sayısını veren bir formül bulmaya çalışacağız. Aradığımız sayılarda şu özellik var, bir basamak ekleyince, her bir sayıda daha önceki basamaklarda kullanılmış rakkamlar kullanılmıyor çünkü kulla-

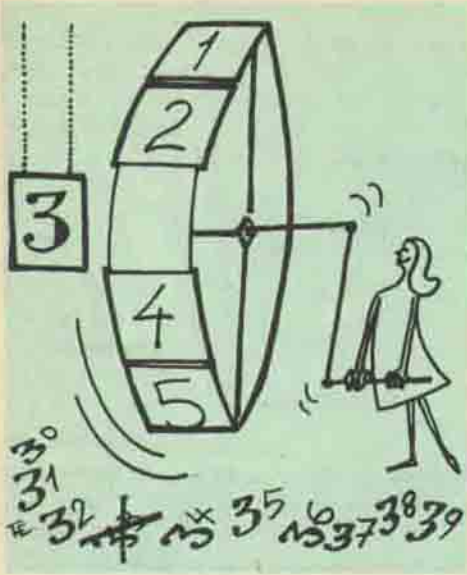


**Sokil 1.** Herhangi bir sayıdan bir basamak eklemekle 10 yeni sayı türetebiliriz. 3 ten türetilen 10 adet iki basamaklı sayıyı ve nasıl türetildiklerini görüyorsunuz. 0 dan 9 a kadar 10, bir basamaklı sayının her birinden onar türeterek yüz ( $10^2$ ), 2 basamaklı sayı, yüz 2 basamaklı sayıdan onardan bin ( $10^3$ ), 3 basamaklı sayı türetebiliriz. Ve bu böyle devam eder, gider.

nılmış o'salar aynı rakkamlar tekrarlanmış olacak. O halde tek basamaklı sayıları yazarken her 10 sayıdan istifade edebilirim (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Bunların her birinden ikinci basamak ilavesiyle ancak 9 ar sayı türetebilirim. Çünkü birinci basamakta kullanılmış olan sayıyı kullanmamıya mecburum. Böylece 10 tane tek basamaklı sayıdan 90 ( $10 \times 9$ ) 2 basamaklı sayı; Bu 90 iki basamaklı sayıdan her birinden 8 er tane türeterek —ilk iki basamaktaki 2 sayıyı kullanamam— 720 ( $10 \times 9 \times 8$ ) 3 basamaklı sayı; aynı şekilde devam ederek bu 720 üç basamaklı sayıdan 5040 ( $10 \times 9 \times 8 \times 7$ ) 4 basamaklı sayı; bu 5040 dört basamaklı sayıdan 30240 ( $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$ ) 5 basamaklı sayı ve nihayet bu 30240, 5 basamaklı sayıdan 151200 ( $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ ) elde ederiz. Bu aradığımız sonuçtur. O halde rastgele rakkamları tekrarlamadan telefon çevirsem, rakkamları tekrarlanmayan aradığım telefon numarasını bulma ihtimalim  $1/151200$  dir. Yani gene bulamayacağım. En iyisi rehbera bakmak.

**Çeşitli seçimlerin sayısını bulmaya yarayan bir formül.** Bu problemi bu maksatla vermedik. Çe-





Şekil 2. Sayıların değişik basamaklarında aynı rakamların tekrarlanmasını istemiyorsak, bu sefer, herhangi bir sayıdan, bir basamak eklemekle, kaç yeni sayı türetebileceğimizi bulmak için, yeni sayılar türettiğimiz sayının basamak adedini 10 dan çıkarmalıyız. Çünkü yeni basamakta o sayıda bulunan rakamları kullanarak, değişik basamaklarında aynı rakamların tekrarlandığı sayılar elde ederiz. 3 ten türetilen 33 dışındaki 9 adet sayıyı görüyorsunuz. Yeni basamağı temsil eden çarktan 3 çıkarılmış ve 9 rakam kalmıştır. Böylece 33 elde etmeyi önlemiş oluyoruz. Bu şartlar altında, 0 dan 9 a kadar 10 rakamın her birinden 9 ar sayı türetmekle, 90 (10X9), 2 basamaklı sayı, bu 90 iki basamaklı sayının her birinden 8 (10-2) sayı türetmekle 720 (10X9X8), 3 basamaklı sayı elde edebiliriz. Ve yeni sayılar türettiğimiz sayının basamak adedi birer birer arttıkça türetilen sayılar o nispette azalarak, türetilmek üzere sayı kalmayınca kadar bu böyle devam eder.

şitli seçimlerin sayısını bulmaya kolaylık gösteren bir formül bulmak için verdik. Bu formülün ne kadar geniş bir kullanma alanı olduğunu görünce şaşacaksınız. Bu problemi yukarıda da söylediğimiz gibi önce 10 üzerinden yapılabilecek farklı 6 lı seçim adedini bulup, bu adedi 6 unsurun yapabileceği bütün sıraların adedi ile çarparak da çözebilirdik. O halde bulduğumuz 151 200 (10 X 9 X 8 X 7 X 6 X 5) sayısını 6 unsurun yaptığı sıra adedine bölmekle, on üzerinden kaç farklı 6 lı seçim yapabileceğimizi buluruz. 6 unsurun yaptığı sıra adedi ise 6 X 5 X 4 X 3 X 2 X 1 veya kısaca 6!. Ünem İşaretinin bu maksatla kulla-

nışını geçen yazımızda uzun uzun anlatmıştık.  $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$  sayısını, sıralanan unsurlar aynı sırada ikinci defa yer alamıyacaklarından, sıra birer birer arttıkça, o sıralardan türetililecek sıra adetlerinin, birer birer azalacağı mantığına dayanarak bulduk. Tıpkı 151 200 sayısının elde edilmiş olduğu gibi.

Bu sayıyı 151 200 (10 X 9 X 8 X 7 X 6 X 5), 720 (6 X 5 X 4 X 3 X 2 X 1 = 6!) ye bölmekle 10 üzerinde kaç farklı 6 seçim yapacağımızı bulacağımızı söylemiştik. Şimdi genel bir ifade elde etmek için 10 X 9 X 8 X 7 X 6 X 5 sayısını 4 X 3 X 2 X 1 [= 4! = (10-6)!] sayısını ile çarpalım (10 dan 6 çıkınca 4 kaldığına dikkat edin). Böylece 10 X 9 X 8 X 7 X 6 X 5 X 4 X 3 X 2 X 1 ifadesini buluruz ki bu kısaca 10! şeklinde yazılabilir. Sonucun değişmemesi için gene aynı sayıya bölelim, böylece:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = \frac{10!}{4!} = \frac{10!}{(10-6)!} \text{ buluruz.}$$

10 a genel olarak, n, 6 ya genel olarak r dersek böyle bir formül elde ederiz:

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

Bu formül n unsurdan (örneğinizde 10) mümkün olan bütün çeşitli r (örneğinizde 6) tanesini seçerek bunlarla yapılabilecek bütün sıraları verir. Bunu da r unsurun yaptığı sıra adedi r! (örneğinizde 6!) e bölersek, n unsurdan her seferinde r unsur seçilerek kaç farklı seçim yapabileceğimizi veren formülü buluruz.

$$\frac{n!}{r! (n-r)!}$$

Ne o beğenmediniz mi? Biraz ilerde bunun ne kadar yararlı olduğunu görüp bayılacaksınız.

### GEÇEN SAYIDA VERİLEN PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1) 20 zar atarak 2 defa 6 elde etme ihtimalini hesaplayınız. 2 adet 6 elde ettiğimize göre, 2 defa ihtimali (1/6) olan «6» ve 18 defa ihtimali (5/6) olan «6 dışı» bir sayı gelecektir. Bunlar VE halleridir. Bu ihtimalleri çarpalım :

$$(1/6)^2 \times (5/6)^{18}$$

iki adet 6 çeşitli şekillerde elde edilebilir. 20 zarın içinden 2 şer 2 şer seçimler yaparak, her çiftte

6 ların çıkmış olduğunu tasarlayabiliriz. Bu seçimlerin sayısını bulmak için her bir zarın yanına diğer 19 zarı teker teker getiririz. Böylece 20 X 19 2 zarlı sıra elde ederiz. Eğer zarlar renkli ise böyle durumlar göreceğiz: Kırmızı - yeşil; Yeşil - kırmızı. Birincisine kırmızı zarla, ikincisine yeşil zarla başladığımız zaman rastlıyacağız. Bu iki durum aynı neticeyi verdiğinden 20 X 19 sayısını 2 ye bölmeliyiz. Bu durumlardan ancak birinin ihtimalini temsil eden yukardaki sayıyı bu adetle çarpmalıyız. Sonuç :

$$\frac{20 \times 19}{2} \cdot (1/6)^2 \cdot (5/6)^{18} \text{ olur.}$$

2)  $\frac{n!}{r!(n-r)!}$  formülü çeşitli VEYA hallerini hesaplamakta kullanılabilir mi?

Evet! Bu formül n şey içerisinde her sefe-

rinde r şey seçerek kaç farklı seçim yapabileceğimizi veren formüldür. Yukardaki örnekte çeşitli VEYA ile ifade edilebilecek durumları hesaplamak için 20 şey içerisinde her seferinde iki şey seçiyorduk. O halde n = 20, r = 2.

$$\frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20 \times 19 \times 18!}{2! \times 18!} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$$

(18! = 18 X 17 X 16 X 15 X 14 X 13 X 12 X 11 X 10 X 9 X 8 X 7 X 6 X 5 X 4 X 3 X 2 X 1 ve 2! = 2 X 1 = 2 olduğuna dikkat edin).

#### YENİ PROBLEMLER

1) 10 kişi içerisinde 6 değişik görev için 6 kişilik seçimler yapıyorsunuz. Bu seçimleri kaç farklı şekilde yapabilirsiniz?

2) 10 kişi yolda 6 sinema bileti buluyor, kaç farklı 6 lı grup sinemaya girebilir?

**Düzeltilme :** 34. cü sayımızda 38. ci sahifede Şekil 2'nin üçüncü satırındaki «yetmiyorsa» kelimesi «yetiyorsa» olacaktır. Düzeltir ve özür dileriz.

### SINIR KOYMA!

*İnsan kafasının, o anda, anlaşılmasını güç bulduğun serüvenlerinden kaçma! «Pratik» insanların olmaz dedikleri şeyler üzerine açık fikirlerle atıl. Belki bizim sandığımızdan daha fazla duyularımız vardır. Binlerce yıldan beri elektrik etrafımızda idi, fakat biz ondan faydalanamıyorduk. Acaba bugün de bu kadar az anladığımız, fakat nasıl olacağını bildiğimiz takdirde anlayabileceğimiz kafanın daha birçok güçlerinin mevcut olmadığından nasıl emin olabiliriz.*

A. WHITMAN

### Ö L Ç Ü

*Basit Amerikan fıstığından mucizeler yaratan ünlü zenci bilgin George Washington Carver şu hikâyeyi anlatırdı :*

*Küçükken bir gün Tanrıya «Ulu Tanrım, dedim, ne olur, bana evrenin esrarını söyle». Fakat Tanrı şöyle cevap verdi; Onun esrarını bilmek yalnız Bana mahsustur».*

*Bunun üzerine, «öyleyse bana Amerikan fıstığının esrarını söyle», dedim. «Evet,» dedi, Tanrı, «George, bu hemen hemen senin ölçüne göredir». Ve bana bunun bütün sırlarını açıkladı.*