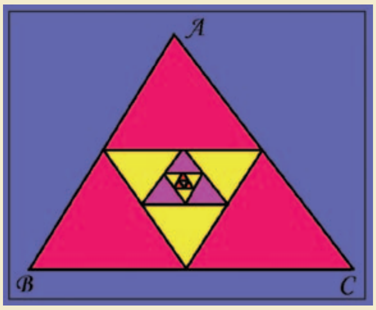
E n g i n   T o k t a ş
m a t e m a t i k _ k u l e s i @ y a h o o . c o m

Sonsuz Toplam



ABC eşkenar üçgeninin içine, şekildeki gibi köşeleri dıştaki üçgenin kenarlarının orta noktasına gelecek biçimde iç içe sonsuz sayıda üçgen çiziliyor. AB = 10 olduğuna göre tüm üçgenlerin çevreleri toplamı kaç olur?

Köprüdeki Trafik

Sisli bir gecede köprüyü geçen bir araba ile bir kamyon son anda birbirlerini fark ederek köprüde dururlar. Köprü o kadar dardır ki ne iki araba yan yana geçebilir ne de herhangi biri manevra ile U dönüşü yapabilir. Araba köprü üzerinde kamyona göre iki kat fazla yol yapmış ve bunu t sürede gerçekleştirmiştir. Kamyon, arabanın yarısı kadar yol yapmasına rağmen 2t sürede köprünün ucundan karşılaştıkları noktaya gelebilmiştir. Geri viteste iki aracın da hızı yarıya düştüğüne göre, en kısa sürede ikisinin de köprüyü geçebilmesi için kim yol vermelidir?

Ters Çarpım

Şimdi şu çarpıma dikkat edin: 2618 x 11 = 28798. Eğer bu çarpımda 2618 sayısını ters çevirip yine 11 ile çarparsak (8162 x 11 = 89782) sonuç da tersine dönüyor! Acaba aynı özelliğe sahip bir başka sayı bulabilir misiniz? Peki bu kurala uyan tüm sayılar için genel bir kural söylemek mümkün mü?

Şans Eseri

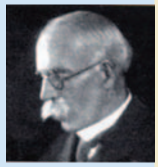
Öyle anlar vardır ki siz istemeseniz bile şansınız sizi zorla doğru yola sokar. Bakın bu kural biraz dikkatsiz bir öğrencide nasıl da kendisini gösteriyor:

$$A=\left(x^4+x^3+x^2+x+1+\frac{2}{x-1}\right)\cdot\left(x^4-x^3+x^2-x+1-\frac{2}{x+1}\right)$$

Yukarıdaki eşitliği hesaplamak isteyen bir öğrenci nasıl olduysa parantezler içindeki son terimleri (kesirli olanları) yazmayı unutuyor ve $A=(x^4+x^3+x^2+x+1).(x^4-x^3+x^2-x+1)$ eşitliği üzerinden hesabını yapıyor. Ne var ki tüm x değerleri için A'nın değerini doğru buluyor. Acaba bu nasıl olabilir?

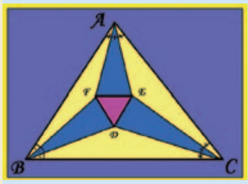
Matematiğin Şaşırtan Yüzü

Morley Teoremi



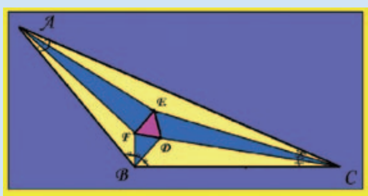
Yaklaşık 100 yıl önce 1899 yılında, Haveford College'da profesörlük yapan Frank Morley, geometri alanında kendisini bile şaşırtan ilginç bir keşfe imza attı. Morley'in okul yıllarında bazı sağlık problemleri nedeniyle pek de parlak bir öğrenci olmaması, bu keşfe sadece kendisinin değil doğrusu çevresindekilerin de şaşırmasına neden oldu. Bulduğu teorem o kadar yalın ve güzeldi ki dünya üzerinde ses getirmesi çok da uzun sürmedi. Bu ayki "Matematiğin Şaşırtan Yüzü"nde işte bu büyüleyici güzellikten, Morley Teoremi'nden bahsedeceğiz.

Teorem özetle şunu söylüyor: " Üçgenin iç açılarının herbirini üç eşit parçaya bölen açıortayları çizin. Bu açıortayların en yakın komşu açıortay ile kesişim noktalarını birleştirdiğinizde her zaman eşkenar bir üçgen elde edersiniz."



Teoremin güzel yanı üçgenin dar açılı, geniş açılı üçgen olmasından bağımsız bir şekilde her üçgene uygulanabilmesi. Biz rasgele iki durum seçtik ve teoremin söylediği biçimde çizdik. Şekillerde de görebileceğiniz gibi rasgele seçilmiş ABC üçgenin içine teoremdeki kurala uygun çizilen açıortaylar, her zaman eşkenar bir üçgen olan DEF'yi yaratıyor.

Gelelim teoremin ispatına. Çeşitli kaynaklarda teoremin farklı birçok ispatı bulunmasına rağmen biz bunlardan sadece bir tanesine değineceğiz. Sayfadaki yerimizin yeterli olmaması nedeniyle ispatın işlem kısmını da sizlere bırakacağız. İspatta iki temel düşünce bulunuyor: **1)** ABC üçgeninin kenarlarını ve iç açılarını bildiğimizi varsayalım. Bu durumda ilk olarak açık sarı renkteki üçgenlerde sinüs teoremini (genel bir ABC üçgeni için a/sin A = b/sin B = c/sin C) kullanarak AF, AE, BF, BD, CD ve CE kenarları ile ilgili eşitlikler elde ederiz. **2)** Daha sonra bu eşitliklerin de yardımıyla mavi renkteki üçgenlerde kosinüs teoremini (genel bir ABC üçgeni için $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos(ACB)$)

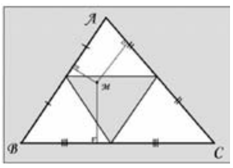


kullanarak FE, FD ve DE kenarlarının eşit olduklarını gösteririz. Bunu yaptığımız zaman büyüleyici bir teoremin ispatını da tamamlamış oluruz.

(Morley Teoremi ve ispatlarıyla ilgili daha fazla bilgi almak isterseniz http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.shtml web adresinden faydalanabilirsiniz.)

Geçen Ayın Çözümleri

Üçgenden Üçgen



M noktasından çizilen üç kenarın üçgen oluşturabilmesi için herhangi ikisinin toplam uzunluğunun diğerinden büyük olması gerekiyor. Amacımız bu şartı sağlayan M noktasının bulunabileceği alanın tüm alana oranını bulmak. Çünkü bu değer bize aynı zamanda sorudaki olasılığı verecek. Bahsettiğimiz şartı sağlayan alan ise şekilde gri üçgen olarak gösteriliyor. Bunun sebebini siz okuyucularımıza bırakıyoruz. Gri üçgenin alanı tüm alanın 1/4'ü olduğuna göre olasılık da %25 olur.

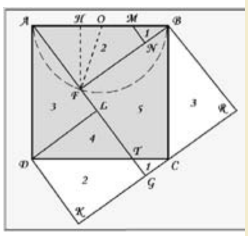
Hazine Paylaşımı

Bu soru Euler'e atfedilse de aslında bulan kişi Chuquet'tir. Gelelim sorunun cevabına: tüm hazineye x, her bir korsana düşen paya da y diyelim. Bu durumda ilk korsan $a+\frac{x-a}{n}$ tane altın alır. İkinci kişinin payına ise $2a+\frac{1}{n}\left[x-\left(a+\frac{x-a}{n}\right)-2a\right]$ tane altın düşer. Bu iki değeri birbirine eşitlediğimizde $x = (n-1)^2.a$ ve $y = (n-1).a$ eşitliklerini elde ederiz. Dikkat ederseniz x/y değeri bize korsan sayısını verir. O halde korsan sayısı da n-1'dir.

Sıralı Kağıtlar

Kağıtların diziliş sırasını uzun süren denemelerle bulabileceğiniz gibi bazı küçük ayrıntıları formülize ederek de işinizi kolaylaştırabilirsiniz. Örneğin kağıtları açtığınız ilk turda as, papaz, kız, vale, 10, 9, ve 8'in birer sıra atlayarak dizide yerleşmesi gerektiğini kolayca görebilirsiniz. Daha sonra aralarında kalan boşluklara yine birer satır atlayarak 7, 6 ve 5 yerleşir. Bu şekilde tüm kağıtlar diziye uygun sırada yerleştirilebilir. En sonunda elde edeceğiniz kağıt dizisi şöyle olmalıdır: as, 3, papaz, 7, kız, 4, vale, 6, 10, 2, 9, 5, 8.

Beş Parça



O noktasının merkez ve OA ile OB'nin yarıçap olduğu yarım daireyi şekildeki gibi çizelim. 3AH=AB olacak biçimde seçilen H noktasından bir dikme çizelim ve bu dikme çemberi F noktasında kessin. Daha sonra BF doğru parçasını ve BC'yi T noktasında kesecek biçimde AF doğrultusunu çizelim. TC = BM olacak biçimde M'den BF'ye dikme çizelim. Sonuç olarak kareyi 5 parçaya ayıran kesimlerimiz AT, DL, BF ve MN oldu. Bu kesimler sonucunda DLGK karesi ile alanı DLGK karesinin iki katı olan BFGR karesini sorunun bizden istediği şekilde elde ettik.