FİZİKTE KUATERNİON VE OKTONİON YAPILAR

Meral SERDAROĞLU*

Bu yazıda size büyük fizikçi ve olağanüstü insan Prof.Dr. Feza Gürsey'in fiziğe yerleştirdiği kuaternion ve oktonion cebirlerini tanıtmak istiyorum. Feza Bey'in hayran olduğu bu yapılar en temel araştırmalarda, fiziğin çok değişik konularında ortaya çıkmayı sürdürüyor. Feza Bey'in çalışmalarını, fiziğe katkılarını anlayabilmek için işe bu sayı cebirlerini öğrenmekle başlamak gerekir.

Prof.Dr. Feza Gürsey'in 60. yıl dönümünü kutlamak için 1981 yılında Yale Üniversitesinde yapılan bilimsel şenlikte önemli ve meşhur fizikçiler konuştu. Feza Bey'in bilimsel katkılarının önemini anlattılar, olağanüstü kişiliğinden, bilgeliğinden söz ettiler. Toplantıdaki konuşmalar bir kitap halinde derlendi.(1) Bu ilginç konuşmalardan birisini, Princeton İleri Araştırmalar Enstitüsü'nde araştırmalar yapan meşhur bir matematiksel fizikçi ve çağdaş bir düşünür olan Prof. Freeman J.Dyson yaptı. Prof.Dyson'ın konuşmasının başlığı "Moda Olmayan Uğraşlar" idi ve bu seçminin nedenini şöyle anlattı: "Dönüp geçmişe bakarsak matematiksel fizikte en önemli buluşların ilgisiz nedenlerle, pek de ilginç olmayan problemlerin sonucu keşfedildiklerini görürüz. Yıllar sonra bu buluşlar onları keşfedenlerin bile hayal edemeyeceği biçimde aniden son derece önemli ve verimli olurlar. İyi bir matematiksel fizikçi olmak için fizik ve matematiğin arasındaki sınırda, olağanüstü bir sezgi ile ilginç matematiksel yapıları keşfedebilmek ve herkesin çalıştığı konuların dışına çıkabilmeyi becermek gerekir. Bunu yapabilen Feza gibi insanlar ise çok nadirdir. Onun çalıştığı araştırma konularına bakınız:

1. Konform Grubu
2. De Sitter Grubu
3. Klâsik spinli elektron
4. Relativistik olmayan SU(6)
5. Mach relativitesi (göreceliği)
6. Kerr Geometrileri
7. Kuaternionlar ve Oktonionlar
8. İstisnai (Exceptional) Lie Cebirleri

Tüm bu uğraşların özelliği yapıldıkları zaman pek de önemli görülmeyip uzun vadede çok mühim olmalarıdır."

Feza Bey kuaternionik ve oktonionik yapıların önemini 1950'li yıllarda sezip bu yapıları ve ilgili istisnai grup ve geometrileri çalışmaları ile fiziğe yerleştirdi. Feza Beyin kuaternionlar üzerindeki çalışmaları konform grubu(2), genel relativitede bazı çözümler(3), Yang Mills teorisinde instanton çözümleri(4), kuaternionik analitisite ve Öklidyen relativitede Kahler yapısı(5) ve bu uzayda diffeomorfizmlerin kuaternionlarla kovaryant gösterimi(6) gibi geniş bir yelpaze oluşturur.

Feza Bey oktoinonlar ve onlarla ilgili istisnai gruplarla 1970 yılında ilgilenmeye başladı ve kendi deyişi ile "onlarla eğlenmeye" hayatı boyunca devam etti. Anlaşılması son derece zor matematik yayınlarını tarayarak, oktonion cebirini "fizikçilerin hazmedebileceği şekilde derli toplu" bir matematik girişle fiziğe tanıttı(7). Renk dinamizminin oktonion cebiri ile ilgisini gösterdi. Nambu, Pais, Yang, Gell-Mann gibi fizikçiler bu konu ile hemen ilgilenip oktonionları öğrenmek için Feza Bey'den konuşmalar istediler. SU(3) simetrisinin oktonionik yapıdan dolayı gayet doğal bir şekilde ortaya çıktığını gören Feza Bey, "Birleşik Ayar Alan Teorileri" (GUTS) yani kuvvetli, zayıf ve elektro manyetik kuvvetleri birleştiren ayar teorisi inşasında istisnai grupların kullanılması gerektiğine işaret etti ve E_6, E_7 gruplarını önerdi(8). Son yıllarda, Einstein'ın rüyasını gerçekleştirmek, gravitasyon ile elektrozayıf ve kuvvetli etkileşmeleri birleştirmek isteyen fizikçiler, süpersicim, süpersimetri ve süpergraviteyi keşfettiler. Feza Bey'in son on yılda süpergravite ve süpersicim konularında yaptığı çalışmalar tüm etkileşmeleri birleştirecek teorilerin temelinde oktonionların yattığını ve bu ilginç cebirlerin doğa kanunlarının dili olduğunu ve doğanın geometrik yapısını anlamamıza yardımcı olduğunu kanıtladı(9). Oktonionik yapılar ve istisnai grupları kullanmadan doğanın sırlarını çözemeyeceğimiz açıkça belli oldu.

Feza Bey'in 1981 yılında İstanbul Üniversitesinden aldığı Fahri Doktora töreninde yaptığı konuşmada Seyyid Nesimi'den okuduğu mısralar bize fizikte son yıllarda olan gelişmeleri çok güzel anlatıyor:

Deryâ-yı muhit cûşa geldi,
Kevn ile mekân huruşâ geldi,
Sırr-ı ebed oldu âşikârâ..

(Varlığı çevreleyen deniz coşup taştı. Kainat ve dünya kendinden geçti. Ebedi sır, gizlilik açığa çıktı.)

Sırların ortaya çıkmasına yardımcı olan kuaternionik ve oktonionik yapıların hikâyesini Feza Bey'in İspanya'da "1. Uluslararası Bilimsel Fikirlerin Tarihi Toplantısı"nda yaptığı uzun ve detaylı konuşmada bulabilirsiniz(10). Ancak bu konuşmada çok büyük bir eksiklik var, Feza Bey'in bu yapıların fiziğe girmesi için yaptığı çalışmalara hiç değinilmiyor. Konuşmanın sonunda bunu belirten Speiser'e Feza Bey'in cevabı "Bunu, herkesin kendi yaptıklarını anlatan konuşmalarına nazire olarak bilhassa yaptım." olmuş!!

KUATERNİON CEBİRİ

Reel sayıları (R) hepimiz ortaokulda öğreniyoruz, sanal (karmaşık) sayıları (C) kullanmaya ise lisede başlıyoruz. Modern fizik ile tanışınca ise kuaternionları

* Prof.Dr., Boğaziçi Üniversitesi Fizik Bölümü.

(H) kullanmamız gerekiyor. Bundan başka bir tane daha karmaşık sayı sistemi var onun da adı Cayley cebiri ya da oktonionlar (O).

Sanal sayıları $c = c_0 + ic_1$ şeklinde c_0 ve c_1 reel bileşenleri ile yazabiliriz. Burada i, eksi sayıların karekökünü almakta kullandığımız sanal birimdir,

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1.$$

Sanal sayıların eşlenikleri

$$c^* = c_0 - ic_1,\ (c^*)^* = c$$

olarak tanımlanır, yani sanal birim ile ilgili kısmın işareti değişir. Böylece sanal sayıların mutlak değerlerini (normlarını),

$$N(c) = c\,c^* = c^*c = c_0^2 + c_1^2 = c_\alpha c_\alpha\ (\alpha = 0,1)$$

olarak daima pozitif olacak şekilde tarif edebiliriz. Bu kuadratik form herhangi iki x ve y sanal sayıları için

$$N(x)\,N(y) = N(xy)$$

bağıntısını da sağlar. Ters eleman,

$$c^{-1} = (N(c))^{-1}\,c^*$$

olur ve

$$cc^{-1} = c^{-1}\,c = 1$$

şeklinde birim elemanını verir.

Reel ve sanal sayılar hem değişim, $xy = yx$, hem de birleşme $x(yz) = (xy)z$ özelliklerine sahiptirler. Ayrıca toplama ve çarpma işlemleri için dağılım özellikleri vardır,

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Bazı özellikleri bir kenara bırakırsak, kuadratik normu olan başka karmaşık sayı cebirleri bulunabilir mi? Bu soruya cevap arayanlar arasında Legendre, Gauss, Hamilton, Graves, Cayley, Hurwitz gibi matematikçiler bulunuyor. 1843'te Hamilton vektörleri bölmeye çalışırken böyle bir cebiri, kuaternionları, keşfetmiş(11). Bir iki ay sonra Graves "oktav" adını verdiği oktonionları bulunca hemen Hamilton'a yazmış. Kuaternionları inşa ederken değişme özelliğini rahatça feda etmiş olan Hamilton, Graves'in oktonionların birleşme özelliğini de kaybetmiş olmalarını kabul etmemiş ve Graves'e buluşunu basması için yardım etmemiş. Oktonionlar 1845'de Cayley tarafından tekrar keşfedilmişler, bu nedenle matematikte Cayley sayıları olarak biliniyorlar(12). Yeni sayı cebirleri bulmak için boşuna çabalardan sonra Frobenius, birleşme özelliğine sahip kuadratik normlu bölüm cebirlerinin sadece reel (R), sanal (C) ve kuaternion (H) sayıları olduğunu göstermiş. 1898'de de Hurwitz yeni sayı arayışlarına son vermiş(13). Hurwitz teoremine göre kuadratik normlu bölüm cebirleri R, C, H ve oktonionlar (O) dur ve böyle başka cebir yoktur. Bu cebirlerden kuaternionların değişme, oktonionların ise hem değişme hem birleşme özelliği yoktur. Kuaternionların birleşme özelliği olduğu için 2 x 2 boyutlu matrislerle temsil edilebilirler. Bu nedenle bazı matematikçiler kuaternionların genel matris cebirlerinin bir özel hali olduğunu düşünüp önemli bir yapı olmadıklarını sanmışlar. Hamilton'u da son yıllarını kuaternionlara ayırdığı için eleştirmişler.

Kuaternionların temel fizik kanunlarının incelenmesinde oynadığı rolün önemi özel relativite ve kuantum mekaniğinin keşfi ile daha iyi anlaşıldı. Feza Bey 1955 yılında özel relativiteyi kuaternionlar ile ifade etmeye çalıştığı bir yayın yaptı(14). Simetrik yapıları fark etmesindeki olağanüstü kolaylığı ile Feza Bey kuaternionların temel fizik kanunlarında önemli bir rol oynayacağını sezmişti.

Temel parçacıkların klâsik bir kavrama karşılık gelmeyen, kendi etrafında dönme olarak tanımlayabileceğimiz spin adını verdiğimiz bir özelliği vardır. Elektron, proton gibi parçacıkların da yukarı ve aşağı olmak üzere iki spin durumu vardır, yani bunlar spini yarım olan, $s = 1/2$, fermionlardır. Pauli, spinli elektronu tarif edebilmek için iki boyutlu Pauli matrisleri, σ_i, $i = 1,2,3$, ile gösterdi. Bu matrislerin "i" sayısı ile çarpılmış kuaternionlar alduğunu makalesinin dipnotunda Pauli belirtmiştir ama kuantum mekaniğinde hep Pauli matrisleri olarak adlandırılırlar (15).

Nötronun keşfinden sonra nükleer fizikte yükten bağımsızlık dediğimiz simetrinin ifadesi için yine kuaternionları kullanmak gerekti. Proton ve nötron, aynı parçacığın (nükleon'un) iki durumu olarak anlaşılınca kuaternionlar bu sefer de izospin denen bu simetriyle ilgili operatörler olarak ortaya çıktı.

Dirac'ın relativist dalga denkleminde kullandığı 4x4 Gamma matrisleri birbirlerinden bağımsız iki takım kuaterniondan oluşan Clifford sayılarıdır. Clifford, ters değişim, $xy = -yx$ gibi, bağıntısını sağlayan ve kareleri sıfır olan Grassmann sayılarının cebirlerinin yeterli sayıda kuaternion kullanarak nasıl inşa edileceğini 1876 yılında göstermişti. Bu sayılar süpergravitede kullanılmaktadır.

Spinleri tam sayı olmayan parçacıklar, (Fermionlar), Pauli dışarlama ilkesine uyar ve bir arada bulunmak istemezler. Bu parçacıkların yaratma ve yoketme operatörleri ters değişme (anticommutation) bağıntısını sağlar,

$$[a_k, a_j] \equiv a_k a_j + a_j a_k = 0$$
$$[a_k^+, a_j^+] = 0$$

yani Grassmann bağıntılarına uyarlar. Jordan ve Wigner bu operatörleri inşa edebilmek için Clifford'un, Grassmann sayılarını kuaternionlarla elde etme yöntemini kullandılar (16); kalıcı ve önemli bir yer kazandılar. SU(2), kiral SU(2)xSU(2), SU(3) ve SU(6) grupları fiziğin baş köşesine yerleştiler. Bu grupların hepsinin, Hurwitz cebirleri ve geometrilerini sınıflarken, Freudenthal, Rozenfeld ve Tits'in ortaya çıkardığı "Tılsımlı Kare"de yer aldığını ilk defa Feza Bey farketti ve bu yeni cebir ve geometrilerle kendi deyişi ile "eğlenmeğe" başladı.

Bileşenleri reel olan bir kuaternionu, reel ve sanal sayıları genelleştirerek

$$\begin{aligned} q &= q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 \\ &= q_0 e_0 + \mathbf{q.e} \\ &= q_\alpha e_\alpha \quad (\alpha = 0,1,2,3,) \end{aligned}$$

şeklinde gösteririz. ($c = c_0 + i\, c_1$ şeklindeki sanal sayıların $e_0 = 1$ ve $e_1 = i$ birimleriyle $c = c_0 e_0 + c_1 e_1$ şeklinde gösterilmesi gibi). Burada 3 tane sanal birim vardır, e_1, e_2, e_3 ve bunlar aşağıdaki çarpım tablosunu sağlarlar.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1

Çarpım kurallarını kısaca

$$e_i e_j = -\delta_{ij}\, e_0 + \epsilon_{ijk}\, e_k\,, \ (i,j,k = 1, 2, 3$$

şeklinde yazabiliriz. Burada δ_{ij}

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

olarak tarif edilen Kronecker fonksiyonudur ve ϵ_{ijk} tamamen antisimetrik Levi-Civita tansörüdür. (ijk)'nin değerlerine göre ϵ_{ijk}, + 1 ya da -1 olur,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & (i,j,k) = (123), (312), (231) \\ -1, & (i,j,k) = (132), (321), (213) \end{cases}$$

Çarpım tablosundan da görüleceği gibi sanal birimlerin değişme parantezleri (commutator)

$$[e_i, e_j] = e_i e_j - e_j e_i = 2\, \epsilon_{ijk}\, e_k$$

şeklinde sıfır olmadığı için bu cebir değişimlilik özelliğini kaybeder.

Ters değişme (anticommutator) parantezlerinden

$$\{e_i, e_j\} = e_i e_j + e_j e_i = -2\, \delta_{ij} e_0 = -2\, \delta_{ij}$$

bağıntısının sağlandığı ve sanal birimlerin karelerinin tıpkı i'nin karesi gibi —1 olduğu görülür.

Reel bileşenli bir oktonionun eşleniği aynı sanal sayılarda olduğu gibi sanal birimlerin işaretlerini değiştirerek tarif edilir:

$$q^* = q_0 e_0 - q_i e_i = q_0 e_0 - \mathbf{q.e}.$$

Sanal eşlenik alma operasyonunun

$$(q^*)^* = q, \qquad (xy)^* = y^* x^*$$

özellikleri vardır.

Şimdi reel sayılar cismi üzerinde tanımlanmış kuaternionlarla bazı basit işlemler yapalım:

$x = 2 + 3e_1 + e_2$ ve $y = 1 + e_3$ iki kuaternion olsunlar. Her sanal birim birbirinden bağımsız olduğu için toplam

$$x + y = 3 + 3e_1 + e_2 + e_3$$

olur. Kuaternionları reel sayılarla çarpmak için her bileşenini çarpmamız gerekir, örneğin:

$$8\, x = 16 + 24e_1 + 8e_2$$

olur. Genelleştirilirse, kuaternionların toplamları ve reel sayılarla çarpımlarını, α ve β reel sayılar, x ve y kuaternionlar olmak üzere

$$(\alpha x + \beta\, y = (\alpha x_0 + \beta\, y_0 + (\alpha X + \beta Y).\, \mathbf{e}$$

şeklinde yazılabilir. Kuaternionları birbiri ile çarpmak için ise çarpım tablosunu kullanıp sanal birimlerin ayrıca çarpılması gerekir. Örnek olarak x ile y'yi çarpalım:

$$\begin{aligned} xy &= (2 + 3e_1 + e_2)(1 + e_3) \\ &= 2 + e_3 + 3e_1 + 3e_1 e_3 + e_2 + e_2 e_3 \\ &= 2 + e_3 + 3e_1 - 3e_2 + e_2 + e_1 \\ &= 2 + 4e_1 - 2e_2 + e_3 \end{aligned}$$

olur ve yx hesaplanırsa xy ile aynı sonucun çıkmadığı görülür.

İki kuaternionun çarpımı

$$xy = x_0 y_0 + x_0 y_i e_i + y_0 x_i e_i + \epsilon_{ijk} x_i y_j e_k \ (i,j,k = 1,2,3)$$

yazılırsa sonucun bir kuaternion olduğu ve cebirin kapalı olduğu görülür.

Kuaternionların mutlak pozitif normları, N(q),

$$N(q) = qq^* = q^* q = q_\alpha q_\alpha \ (\alpha = 0,1,2,3)$$

olarak ifade edilirse, bu kuadratik norm yine $N(xy) = N(x)\, N(y)$ bağıntısın sağlar ayrıca her zaman pozitif ve sıfırdan farklıdır. Norm fonksiyonunu kullanarak kuaternionlar için ters eleman

$$q^{-1} = (N(q))^{-1}\, q^*,$$

olur ve

$$q^{-1} q = q\, q^{-1} = 1$$

özelliği sağlanır. Böylece kuaternionların bölünebildiği ve bir bölüm cebiri oluşturduğu görülür. Ancak değişimli olmayan bir cebirde sağ ve soldan çarpmaların sonuçları değişik olduğu gibi bölümlerin de sağdan ya da soldan yapılması farklı sonuçlar verecektir. A ve B (B sıfır olamaz) iki kuaternion ise, A'yı B'ye soldan bölme işlemi $Bx = A$ denkleminde x'in değerini bulmak demektir. A, B'ye sağdan bölünüyorsa $yB = A$ denkleminin y için çözülmesi gerekir. B'nin ters elemanı kullanılarak bölme

$$Bx = A \text{ ise } x = B^{-1}A = B \,/\, A = [N(B)]^{-1}\, B^* A$$

$$yB = A \text{ ise } y = A\, B^{-1} = A \,/\, B = [N(B)]^{-1}\, A\, B^*$$

şeklinde yapılır, x soldan y ise sağdan bölme işlemlerinin sonucu olan kuaternionlardır. (Burada $N(B)^{-1}$ sayısı pozitif bir reel sayı olduğu için onun sağdan ya da soldan çarpması farketmez.)

$$\mathrm{Sk}\, q = \frac{1}{2}\,(q + q^*) \quad , \qquad \mathrm{Vek}\, q = \frac{1}{2}\,(q - q^*)$$

q kuaternionun skalar ve vektör kısımlarıdır. Skalar kısmı olmayan bir kuaterniona vektörel bir kuaternion denir. Vektörel kuaternionlar ile 3 boyutlu uzaydaki vektörler ve bunların skalar (iç) ve vektörel (dış çarpımları gösterilebilir. İki vektörel kuaternion çarpımı

$$XY = (X_i e_i)(Y_j e_j) = -X_i Y_i + \varepsilon_{ijk} X_i Y_j e_k \quad (i,j,k = 1,2,3)$$
$$= -\mathbf{X}.\mathbf{Y} + (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}).\, e$$

şeklinde vektör hesabındaki iki çarpımı da içerir.

Vektör hesabındaki diverjans (div) ve rotasyonel (carl) operatörlerini de Hamilton'un gösterdiği şekilde kuaternionlarla ifade etmek mümkündür. $\nabla = e_i \nabla_i$ şeklinde vektörel kuaternion bir türev bir vektör fonksiyona etki ettirilirse

$$\nabla F(x) = -\nabla . F(x) + e.(\nabla \times F(x)) = -\mathrm{div}\, F(x) + e.\mathrm{curl}\, F(x)$$

bulunur ve

$$N(\nabla) = \nabla_i \nabla_i = \text{Laplace operatörü}$$

olur. Gibbs, 1870 yılında, elektromanyetik teori dersi verirken vektör ve skalar çarpımları ayırmış ve kuaternionlardan bahsetmemiş. 1882 yılında ise Heaviside İngiltere'de vektör hesabını kuaternionlarsız tekrar keşfetmiş. Eski kuaternioncularla yeni vektörcüler arasında "Nature" mecmuasında bir savaş başlamış. Sonunda, vektör ve tensör hesabı kullanılıp temel cebir kuaternionların adı hesaplarda geçmez olmuş, ancak cebir de bölünme cebiri olma özelliğini kaybetmiş.

Kuaternionlar 2 x 2 boyutlu matrislerle de temsil edilebiliyorlar. Bu matrisler kuantum mekaniğinde bilinen Pauli matrislerin "-i" sanal sayısı ile çarpımından elde ediliyor:

$$e_1 = -i\sigma_1 \;, \quad e_2 = -i\sigma_2 \;, \quad e_3 = -i\sigma_3$$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Bir kuarternion yukarıda tanımlanan matrislerle 2 x 2 sanal elemanlı bir matris olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{bmatrix} \;, \text{burada} \quad a = x_0 - ix_3 \,, \quad b = x_2 - ix_1 \,, \quad a^* = x_0 + ix_3 \,, \; b^* = x_2 + ix_1$$

Matrisin determinantı kuaternionun normunu verir, N(x) = Det X. Matrisin Hermitsel eşleniği(17) kullanılırsa $N(x)\,\mathbf{1} = X X^+ = X^+ X$ olur, burada **1**, 2 x 2 birim matrisidir.

Kuaternionların 2 x 2 sanal matrislerle gösterimi SU(2) grubunun bir temsilidir. (S (special) determinantı 1 olan, U (unitary) üniter, yani hermitsel eşleniği ile tersi aynı olan matris demektir.) SU(2) grubu 3 boyutta dönme grubunu içerir. Bir vektör skalar kısmı olmayan bir kuaternionla gösterilebildiği için 3 boyutlu $\mathbf{v} = (v_1, v_3, v_3)$ vektörü izi sıfır olan 2 x 2 bir matrisle

$$V = -i \begin{bmatrix} v_3 & v_1 - iv_2 \\ v_1 + iv_2 & -v_3 \end{bmatrix} = -i\,\sigma_i v_i \quad (i = 1,2,3)$$

yazılabilir. Bir vektörün dönme grubu altındaki değişimi de $\mathbf{V}' = \mathbf{U}\,\mathbf{V}\,\mathbf{U}^+$ halini alır. Bir basit örnek yapalım:

$$A = [\, a_x \,, a_y \,, 0\,] = [\, A \cos\psi \,, A \sin\psi , 0\,]$$

xy-düzleminde, boyu A olan ve x-ekseni ile ψ açısı yapan bir vektör olsun. Bu vektörü z-ekseni etrafında ϕ açısı kadar döndürürsek yeni vektörün koordinatları

$$A' = [\, A \cos(\psi + \phi) \,,\; A \sin(\psi + \phi) \,,\; 0\,]$$
$$= [\, a_x \cos\phi - a_y \sin\phi \,,\; a_x \sin\phi + a_y \cos\phi \,,\; 0\,]$$

olur. Bu dönüşüm 3 boyutta dönme grubunun, O(3), bir özel halidir.

A vektörünü 2 x 2 matris formunda yazarsak

$$A = -i \begin{bmatrix} 0 & a_x - ia_y \\ a_x + ia_y & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

$$U = \begin{bmatrix} \cos(\phi/2) + i\sin(\phi/2) & 0 \\ 0 & \cos(\phi/2) - i\sin(\phi/2) \end{bmatrix}$$

olarak seçilir ve $A' = U\,A\,U^+$ matris çarpımını yaparsak, (okuyucunun ödevi!) A' için yukarıda verilmiş olan yeni koordinatları elde ederiz.

Dönme altında bir vektörün uzunluğu, (normu) değişmez, U matrisi üniter olduğu için yukarıdaki dönüşüm matrisin determinantını değiştirmez. Yani A ve A' vektörlerinin uzunlukları aynı olduğu gibi, A ve A' matrislerinin de determinantları aynıdır. Daha genel olarak bir kuaternion sağdan ve soldan değişik üniter matrislerle çarpılabilir, $Q' = U\,Q\,V^+$. Böyle bir dönüşüm altında determinant değişmeyeceği için kuaternionun karşılık geldiği vektörün normu da değişmez $N(Q') = N(Q)$ olur. Böylece SU(2)xSU(2) grubu altında değişmezlik elde edilir. Bu grup, 4 boyutlu Öklid uzayında dönme grubu O(4)'e izomorftur. O(4) grubunun kuaternionlar ile bu ilgisi sonucu kuaternionlar özel relativited de kullanılırlar. Zaman koordinatı, $x^0 = ct$ (c ışık hızı, t zaman), sanallaştırılır, $x^4 = ix^0$ yapılırsa O(3,1) Lorentz grubu O(4) haline gelir. Bir olayın koordinatları özel relativitede (ct, **x**) ise $x^2 = \mathbf{x}^2 - c^2t^2$ 4-vektörün boyudur. O(4) uzayında ise vektörün bileşenleri (**x**, ict) dir ve vektörün boyu yukarıdaki x^2 ile aynıdır. Enerji - momentum tansörü de (P, i E/c) şeklinde tarif edilince skalar kısımları sanal olan kuaternionlar özel relativiteye girer.

Dirac'ın relativistik elektron, dalga denkleminde yer alan Gamma matrisleri, (γ_μ) μ = 1,2,3,4, iki ayrı takım kuaternion, Pauli matrisleri $\sigma_i^{(1)}$ ve $\sigma_i^{(2)}$, (i = 1,2,3) ve **1** (2 x 2 birim matrisi) kullanılarak inşa edilebilir:

$$\gamma_4 = \sigma_1^{(2)} \otimes 1 \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_n = \sigma_2^{(2)} \otimes \sigma_n^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma_n \\ i\sigma_n & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\gamma_5 = \sigma_2(2) \otimes 1$$

olur. Her seferinde bir takım daha kuaternion alınıp, yukarıdaki şekilde dış çarpım yapılarak yüksek boyutlardaki Gamma matrisleri elde edilir (Clifford metodu). Bu türlü elde edilen Gamma matrislerinden ise Süpergravitede kullanılan Grassmann sayıları bulunur. Grassmann sayıları, r takım kuaternion için

$$2\, a_s = (\gamma_s + i\gamma_{r-s}) \,,\ (s = 1,\ldots,r)$$

olarak tarif edilirse, ters değişik parantezi sıfır olur.

$$\{a_k, a_m\} = a_k a_m + a_m a_k = 0$$

Bu bağıntıdan görüldüğü gibi Grassmann sayılarının kareleri sıfırdır!

OKTONİON CEBİRİ

Graves'in oktavları ya da Cayley'in oktonionlarından oluşan sonuncu Hurwitz cebirinin 7 sanal birimi vardır. Bileşenleri reel ya da sanal sayılar olan bir oktonion,

$$g = g_0 e_0 + g_i e_i,\ (i = 1,\ldots,7)$$

şeklinde yazılır, $g^{o*} = g_0 e_0 - g_i e_i$ oktonionik eşleniği, $g^* = g_0^* e_0 + g_i^* e_i$ sanal eşleniği olarak tarif edilince, reel oktonionlar için norm,

$$N(g) = g g^{o*} = g_0^2 + g_i g_i$$

sanal oktonionlar için ise norm,

$$N(g) = g(g^{o*})^* = g_0 g_o^* + g_i g_i^*$$

şeklinde daima pozitif, reel bir sayı olur. Kuaternionlarda olduğu gibi, norm yine N(x) N(y) = N(xy) özelliğini sağlar.

Bu cebirin sanal birimleri aşağıdaki çarpım tablosunu sağlarlar:

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	$-e_5$	e_4	e_7	$-e_6$
e_4	e_4	$-e_7$	$-e_6$	e_5	-1	$-e_3$	e_2	e_1
e_5	e_5	e_6	$-e_7$	$-e_4$	e_3	-1	$-e_1$	e_2
e_6	e_6	$-e_5$	e_4	$-e_7$	$-e_2$	e_1	-1	e_3
e_7	e_7	e_4	e_5	e_6	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$	-1

Yukarıdaki çarpım tablosu

$$e_i e_j = -\delta_{ij} + \Psi_{ijk} e_k \,,\ (i,j,k = 1,2,3,4,5,6,7) \,,\ e_0 = 1,$$

bağıntısı ile ifade edilebilir. Burada Ψ_{ijk} tamamen antisimetrik bir tansördür ve sıfır olmayan değerleri aşağıdaki üçlülerin sıralı değişmeleri için pozitif, atlamalı değişmeleri için negatiftir. Örneğin:

Ψ_{ijk} = (123),(245),(435),(651),(572),(714),(367) = 1 dir. Ancak Ψ_{752} değeri ise -1'dir. Oktonion cebiri çarpım tablosundan görüldüğü gibi değişimli değildir.

$$[e_r, e_s] = e_r e_s - e_s e_r = 2\Psi_{rsp} e_p,\ (r,s,p = 1,\ldots,7)$$

Bu cebirin birleşim özelliğinin de olmadığı birleşim parantezlerine bakılarak anlaşılır. Birleşim parantezi

$$[a,b,c] = (ab)c - a(bc)$$

olarak tarif edilir ve diğer Hurwitz cebirleri için [a,b,c] sıfırdır. Oktonion cebirinde birim elemanlarının birleşim parantezini tamamen antisimetrik bir tansör ϕ_{ijkm} ile yazmak mümkündür.

$$[e_r, e_s, e_p] = 2\phi_{rspk} e_k,\ (r,p,s,k = 1,\ldots,7)$$

Burada ϕ_{rspk}, Ψ_{ijk} tansörünün, 7 boyutta tamamen antisimetrik $\epsilon_{ijkprst}$ ile tarif edilen "dual"idir.

$$\phi_{prst} = -\frac{1}{6}\,\epsilon_{prstijk}\,\Psi_{ijk}$$

Oktonionlar ile çarpma ve bölme işlemleri aynı kuaternionlarla olduğu gibi sanal birimler için çarpım tablosu kullanılarak yapılır. Ancak yapılan çarpımların sırasına dikkat edilmelidir. Örneğin:

(a(bc))d işleminde ilkönce b ile c çarpılmalı, sonuç a ile soldan çarpılmalı, sonuç d ile sağdan çarpılmalıdır. Bu işlem ile a((bc)d) işleminin sonuçları tamamen farklıdır.

Oktonionların normu 8 boyutlu bir vektörün boyu olarak düşünülürse bu norm 8 boyutlu uzaydaki vektörlerin dönmesi altında değişmez. O halde oktonionların norm grubu O(8) dir. Reel sayıların norm grubu ayrım bir grup olan Z_2 = {1,-1}, sanal sayıların norm grubu O(2), kuaternionların ise O(4) tür.

Bir cebirin sanal elemanlarının çarpım tablosunu değiştirmeyen doğrusal dönüşümler otomorfizm grubunu meydana getirirler. Örneğin, i → -i değişimi sanal sayıların çarpım tablosunu değiştirmez, o halde Z_2 sanal sayıların otomorfizm grubudur. Kuaterniorların otomorfizm grubu SU(2), oktonionlarınki ise istisnai grupların en küçüğü olan G_2 dir.

Oktonionlar sanal bileşenlerle de tarif edilebilirler. Ancak o zaman bir bölüm cebiri olmazlar. Ancak bu şekilde Grassmann sayıları daha kolayca ortaya çıkar. Bölük oktonion cebirini (split octonion algebra) sanal sayı $i = \sqrt{-1}$ kullanılarak u_m ve sanal eşlenikleri (sadece i sayısının işaret değiştirdiği)u_m^*, u_0 ve u_0^* ile şöyle tarif edilir:

$$u_m = \frac{1}{2}(e_m + i e_{m+3}),$$

$$u_m^* = \frac{1}{2}(e_m - i e_{m+3}) \qquad (m = 1,2,3)$$

$$u_0 = \frac{1}{2}(e_0 + i e_7)$$

$$u_0^* = \frac{1}{2}(e_0 - i e_7)$$

Bu cebirin çarpım tablosu aşağıda görüleceği gibi sıfırın çarpanlarını içerir bu nedenle bölüm cebiri değildir.

	u_0	u_0^*	u_r	u_r^*
u_0	u_0	0	u_r	0
u_0^*	0	u_0^*	0	u_r^*
u_p	0	u_p	$\varepsilon_{prs}u_s^*$	$-\delta_{pr}u_0$
u_p^*	u_p^*	0	$-\delta_{pr}u_0^*$	$\varepsilon_{prs}u_s$

Bu cebir Zorn vektör matrisleri ile de gösterilebilir. Bir Zorn matrisi

$$\begin{bmatrix} a & \overline{x} \\ \overline{y} & b \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Burada a ve b reel sayılar $\overline{x}$ ve $\overline{y}$ 3 boyutlu vektörlerdir. Bu matrislerin çarpımı ise şöyle tanımlanır:

$$\begin{bmatrix} a & \overline{x} \\ \overline{y} & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & \overline{u} \\ \overline{v} & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac + \overline{x}\cdot\overline{v} & a\overline{u} + d\overline{x} - \overline{y}\times\overline{v} \\ c\overline{y} + b\overline{v} + \overline{x}\times\overline{u} & \overline{y}\cdot\overline{u} + bd \end{bmatrix}$$

Bu çarpım ve aşağıdaki matrisler kullanılarak bölük cebirin çarpım tablosu elde edilir.

$$u_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e_p & 0 \end{bmatrix}, \quad u_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad u_p^* = \begin{bmatrix} 0 & -e_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad u_0^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bölük oktonionlar, u_m ve u_m^* Grassmann sayılarıdır. Çarpım tablosu kullanılarak

$$u_m u_n + u_n u_m = 0, \quad u_m^* u_n^* + u_n^* u_m^* = 0, \quad u_m u_n^* + u_n^* u_m = \delta_{mn}$$

olduğu bulunur. Bu istisnai Grassmann sayılarının otomorfizm grubu ise yine SU(3)tür.

Freudenthal, Rozenfeld ve Tits, Hurwitz cebirleri ile ilgili tüm geometrileri 1955 ve 1962 yılları arasında sınıflandırdılar. Bu sınıflandırma Feza Beyi heyecanlandıran "Tılsımlı Kare"de görülebilir:

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{O}$
$\mathbb{R}'$	SO(3)	SU(3)	Sp(3)	F_4
$\mathbb{C}'$	SU(3)	SU(3)×SU(3)	SU(6)	E_6
$\mathbb{H}'$	Sp(3)	SU(6)	SO(12)	E_7
$\mathbb{O}'$	F_4	E_6	E_7	E_8

Son satır ve sütundaki gruplar istisnai gruplardır. Yüksek enerji fiziğinde vazgeçilemiyecek SU(3), SU(6), SU(3) x SU(3) gibi grupların hepsi bu karede yer almaktadır. Bu kare içinde yer alma nedenleri ise eliptik, projektif, simplektik ve metasimplektik geometriler ile Hurwitz cebirlerinin doğal ilişkisinden kaynaklanmaktadır. Kısaca, temel parçacıklar fiziği ile ilgili grupların geometrik bir anlamı da olabilir!

1970'lerden sonra temel parçacık fiziğinde gerek deneysel gerek teorik pek çok gelişme oldu. Elektromanyetik ve zayıf etkileşmeler bir ayar alan teorisi ile birleştirildi. Bu teorinin öngördüğü bozonlar İsviçre'deki büyük hızlandırıcı CERN'de gözlendi. Proton ve nötronun çok karmaşık sistemler olduğu, içlerinde kuark denilen "renkli" (gözümüzle gördüğümüz renk değil bir temel parçacık özelliği) temel parçacıklar olduğu anlaşıldı. Yeni kuarklar olduğu öne sürüldü ve bu kuarkların bağlı durumları parçacık olarak gözlendi. Yeni simetriler ortaya atıldı. Tüm temel parçacıkları ve simetrilerini ifade edebilecek büyük gruplar arandı. Kuvvetli (proton gibi parçacıkları meydana getiren kuvvetler) ve elektro-zayıf (β bozulması ve elektron saçılmasına neden olan kuvvetler) etkileşmeleri birleştiren ayar alan teorileri modelleri yapıldı. SU(3) renk grubunun, oktonionlar ile doğal ilişkisini bilen Feza Bey, İstisnai gruplardan E_6 ve E_7'yi Birleştirilmiş Ayar Alan Teorisi modelleri için önerdi(18). E_6 grubuna dayalı, tüm yapılmış modelleri içeren ve hâlâ güncelliğini koruyan bir modeli geliştidi(19). Bu modelde, lepton ve kuarklardan oluşan temel parçacıklar üç aile olarak E_6 grubunun 27 boyutlu temsillerine oturtulur. Bu temsil 3 x 3 boyutlu bir oktonionik matristir. Jordan matrisi denilen bu matrisin özelliği oktonionik eşleniğe göre Hermitsel olmasıdır. Matrisin elemanları sanal oktonion olduğu için oktonionik Hermitselliği sağlayınca matrisin 27 tane sanal serbest seçilebilen elemanı kalır.

Bölük oktonion birimleri ile bu matrisi şöyle yazabiliriz.

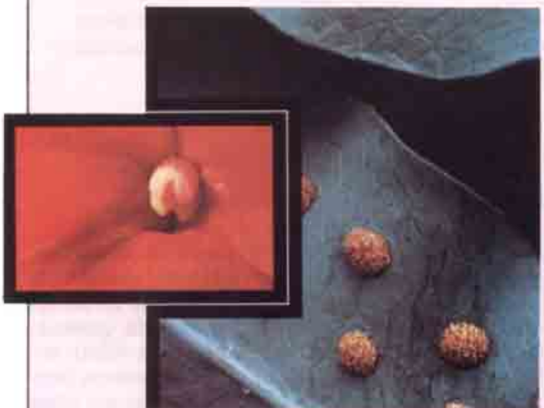
$$J = u_0 L + u_0^* L' + u_i^* S^i + u_i R^i, \quad i = 1,2,3.$$

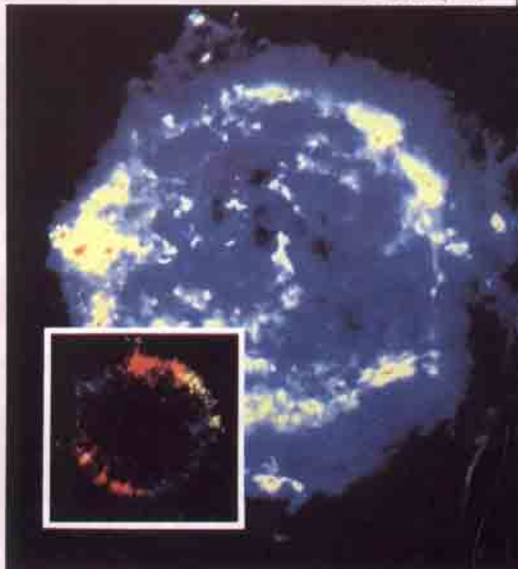
FOTOĞRAFIN DÜŞÜNDÜRDÜKLERİ

Haz.: CEVDET ÇAĞAN

Geçen sayıda yayınladığımız fotograf bir eğrelti bitkisinin yaprağının alt yüzeyinde bulunan sporların büyütülmüş halidir.

Bu sayıda da yandaki fotografı ilginize sunuyoruz.





Burada L matrisinin içine elektron ve onun gibi daha ağır leptonlar (muon ve tau leptonu gibi) girer. Tamamen antisimetrik olan S ve R matrislerinin indisleri renk kuantum sayısına karşılık gelir. Bu 3 x 3 matrisler de renkli kuark ve antikuarkları içerir. E_6 grubunun SU(3) x SU(3) x SU(3) alt grubu renk ve elektrozayıf etkileşmeleri temsil eden $SU(3)^F$ x SU(2) x U(1) grubunu içerir. Ayrıca, ilk Birleşmiş Teori modelleri SU(5), SO(10) modellerini kapsar. SU(6) ve SU(3) x SU(3) gibi dinamik gruplar da E_6'nın alt gruplarıdır. Bu model yeni çok ağır bosonlar, kuarklar ve nötr parçacıklar içerir. Yeni hızlandırıcılarda bu yeni parçacıklar gözlenirse model o zaman gerçekten önem kazanacaktır.

Bölük oktonion cebirleri ve onlarla inşa edilen Grassmann sayıları süpersimetride de kullanıldı, Einstein'in genel relativite teorisinin süpersimetrik genelleştirilmesi gerçekleştirilmeye çalışıldı ve ilk adımlar atıldı. Uzayın, bizim yaşadığımız 4 boyutlu uzay ile temel parçacıkların iç simetri, yük uzaylarından meydana geldiği anlaşıldı. N = 8 süpergravite teorisinde, 11 boyutlu uzayın, 4 boyutlu yaşadığımız uzay ile 7 boyutlu kendi içine kapanmış bir iç simetriler uzayına ayrılmasının nedeni, 4 boyutlu kısmın kuaternionlar, 7 boyutlu küresel kısmın ise oktonionlar ile ifadesidir.

Feza Bey'in son on yıldaki makalelerinin başlıklarına bir göz atınca, oktonionlar ile ilgili konuların son yılların en temel araştırma konuları olduğu görülür. Feza Bey son dakikalarına değin, Hamilton ve Einstein'ın rüyalarının gerçekleştirilmesi yolundaki çabalara oktonionların bu uğraştaki önemli ve temel rolünü göstererek büyük katkıda bulundu. Zamanımızda matematikçiler ve fizikçiler birlikte istisnai yapılar üzerinde çalışıyorlar. Matematik ve fizik el ele oktonionik yapıların büyüsüne kapılmış doğanın gizlerine doğru yol alıyor.

Bu harikulade yapıları bana ve diğer talebelerine tanıtan, elimizden tutup temel fiziğin gizemli aleminin içine sokan Feza Bey'i her an saygı, sevgi ve şükranla anıyorum.

KAYNAKLAR

(1) Symmetries in particle physics, ed. I.Bars, A.Chodos, C.H. Tze, (Plenum, New York, 1984).
(2) Gürsey F. Rev. Fac. Sci. Istanbul A 20, 149 (1955).
(3) Gürsey F. Second Workshop on Current Problems in High Energy Particle Theory, ed. by G. Domokos (The Johns Hopkings Univ., 1978).
(4) Gürsey F. and Tze C.H. Annals of Physics 128, 29 (1980).
(5) Gürsey F. and Tze C.H. Lett. Math. Phys. 8, 387 (1984).
(6) Gürsey F. and Jiang W.J. Math. Physics (1992) basılacak.
(7) Gürsey F. and Günaydın M.J. Math. Phys. 14, 1651 (1973).
(8) Gürsey F. Proc. of the 4th International Colloquium in Group Theoretical Methods in Physics, ed. A. Jenner, 225 (Springer, 1976).
(9) Gürsey F. 13th Johns Hopking Workshop in Firenze, ed. L. Lusanna 579 (World Sci. 1989).
(10) Symmetries in Physics, ed. by M.G. Doncel, (Servei de Publicacions, UAB Barcelona, 1987).
(11) Hamilton, W.R. Lectures on Quaternions, (Dublin, 1853).
(12) Cayley A. Phil. Mag. London 26, 210 (1845).
(13) Hurwitz A. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 309 (1898).
(14) Gürsey F. İstanbul Üniversitesi yayınları, 20, 149 (1955).
(15) Pauli W.Z. Phys. 41, 81 (1927).
(16) Jordan P. and Wigner E.P.Z. Phys. 47 631 (1928).
(17) $M^+ = (M^T)^*$, M_{ij} matris elemanları ise, Hermitsel eşlenik matrisin elemanları $(M^+)_{ij} = (M^*)_{ji}$ olur.
(18) Gürsey F. and Skivie P. Phys. Rev. Lett., 36, 775 (1976). Gürsey F., Ramond P. and Skivie P., Phys Lett., 60B, 177 (1976).
(19) Gürsey F. and Serdaroğlu M. Nuovo Cimento 65A, 337 (1981) Gürsey F. and Serdaroğlu M. Lett. Nuovo Cimento, 21, 28 (1978).