Muammer Abalı

Piano Piano...

Başlık İtalyanca. "Yavaş yavaş" demek. Hatırlayanlarınız olacaktır belki, "Piano Piano Bacaksız" adlı güzel bir filmimiz vardı. Rastlarsanız izleyin.

Amacım size bu güzel filmi hatırlatmak ya da filmin eleştirisini yapmaya kalkmak değil. Bir kelime oyunu yapmak istedim aslında. İki yönlü bir kelime oyunu: Bir taraftan İtalyan matematikçi Guiseppe Peano'nun (1858-1932) adının okunuşu, diğer taraftan matematiğin temel yasalarının önde gelenlerinden Peano aksiyomlarına bir gönderme.

Bu sayıda size bir matematik sisteminin, kullandığımız sayı sisteminin ve bunun üzerine kurulmuş olan bütün matematik yapısının temel taşlarından biraz söz edeyim istedim. Matematiğin "piano piano" inşa edildiğini görelim diye.

Matematikle haşır neşir olmamış birisine 2+2 neden 4 eder diye sorsak, herhalde bize iyi gözle bakmaz. Muhtemelen "Ya kaç olacaktı?" diye tepki verir. Gerçekten de insanı şaşırtabilecek bir sorudur bu. Tanesi 10 TL olan iki sinema biletinin 20 TL ettiğinden neden bu kadar eminiz ve hiç tereddütsüz gişede bu miktarı ödeyiveriyoruz, hiç merak ettiniz mi?

Sayı sistemimizin, doğal sayılar sisteminin yani, elde edilebileceği "temel yasalar" grubuna, Prof. Peano'nun anısına "Peano Aksiyomları" deniyor. Bu aksiyomlara gelene kadar söylenecek çok şey var, ama ana fikir şu: *Ne kadar karmaşık olursa olsun, var olan bir matematiksel sonuç, kendinden önce gelen başka bir matematiksel sonucun üstüne kurulmuştur*. Eğer geriye doğru gitmeye başlarsak, eninde sonunda, her biri son derece basit bir grup aksiyoma ulaşmak mümkündür. Daha doğrusu bu kaçınılmazdır.

Peano aksiyomları toplam beş tanedir.
Anlaşılması çok kolay beş aksiyom.

Aksiyom A:
Elimizde boş olmayan bir sayı kümesi vardır ve 1 elemanını kapsar.

Bunda anlaşılması zor bir nokta yok gördüğünüz gibi. Açıklamaya gereksinim yok. Belki neden böyle bir aksiyom seçildi diye sorabilirsiniz. Ama insaf edin, burada matematiği inşa ediyoruz! Elimizde hiç olmazsa bir sayı olsun. Bu, bir sayımız olduğunu garanti ediyor. Varsayıyoruz. Bir tane sayımız var; nereden buldunuz demeyin, var olduğunu kabul ettik!

Aksiyom B:
Her doğal sayının bir ve yalnız bir ardılı vardır.

Bu biraz zorlayıcı mı sizce? Bence pek değil. Açıklaması kendi içinde. Belki üzerinde konuşacağımız şu olabilir: Acaba bu aksiyom, A aksiyomundan çıkarsanabilir miydi? Yeni bir aksiyom yazmadan ilerleyebilir miydik? Maalesef bu mümkün değil. Yani elimizde sadece 1 varken 2'nin de olduğunu nereden bileceğiz ki? 1 varken 2, 2 varken 3, 3 varken 4 vb. olduğunu böylece garanti ediyoruz. Piano piano, bütün sayıların var olduğunu, her sayıyı takip eden ancak bir tek sayı ve her sayıdan önce gelen ancak bir tek sayı olduğunu böylece garanti edebiliyoruz. İleride çok lazım oluyorlar gerçekten!

Aksiyom C:
Ardılı 1 olan hiçbir doğal sayı yoktur.

Bu aksiyom biraz tuhafınıza gidebilir belki, ama unutmayalım ki bir başlama noktamız olmalı. Yani başta, aksiyom A'da 1 yerine 0 da kabul edilmiş olabilirdi. Bu tamamen kayfi olarak seçilmiş bir başlama noktası. Peano aksiyomları bazen "Aksiyom A: 0 bir sayıdır" diye başlar. Ben 1'den başlamış olayım. Bu bir hata ya da matematikçiler arasında ayıp karşılanan bir şey değil . Şimdilerde internette "Peano Aksiyomları" diye bir arama yapsanız, A aksiyomunda 1 yerine 0 kullanıldığını görürsünüz. Ben Prof. Peano'nun seçtiği 1 sayısını başlangıç seçtim.

Aksiyom D:
Herhangi iki doğal sayının ardılları eşit ise kendileri de eşittir.

Bu da anlaşılması zor bir aksiyom değil gördüğünüz gibi. Önceki aksiyomlardan çıkarsanması da mümkün değil, yani gerekli olmayan bir fazlalık değil.

Aksiyom E:
Bir doğal sayılar topluluğu 1'i içeriyorsa ve başka herhangi bir doğal sayıyı içerdiğinde onun ardılını da içeriyorsa, o zaman bu doğal sayılar topluluğu bütün doğal sayıları içerir.

Bu biraz karmaşık bir aksiyom gibi görünüyor. İlk dört aksiyoma tekrar bakalım ve bu aksiyom neden gerekiyor anlamaya çalışalım. İlk aksiyom 1 sayısının varlığını garanti ediyor. İkincisi diğer bütün doğal sayıların ardıllar aracılığı ile varolduğunu, üçüncüsü başlangıç noktamızı, dördüncüsü ise sayıların birbirine hangi şartlarda eşit olacağını gösteriyor. Bu dört aksiyomdan hareketle, verilen bir doğal sayılar topluluğunun (biz sayı kümesi demeye alışığız aslında) doğal sayılar kümesi olup olmadığını anlamamız olanaksız. Aksiyom E, doğal sayılar kümesinin tanımı aslında. İçinde 1 sayısı olacak ve içindeki her sayının ardılı da içinde olacak. Aslında anlaşılmasında herhangi bir zorluk yok. Gerekliliğinden şüphe duymamız da olanaksız.

İşte size doğal sayılar kümesinin "piano piano" kuruluşu. Sadece son derece basit üç kavramın üzerinde duruyor: *Doğal sayı*, *ardıl* ve *1*.

Doğal sayı denen bir şeyin varlığını kabul ettik; 1 sayısının varlığını kabul ettik ve ardıl denen bir kavram varsaydık. Bir doğal sayıyı takip eden bir başka doğal sayı yani.

Bu aksiyomlarla, örneğin, toplamayı tanımlayabiliriz:

Eğer x bir doğal sayı ve x'in ardılı x_a ise;

$$\mathbf{x+1=x_a}$$

Eğer x ve y doğal sayılar ise;

$$\mathbf{x+y_a=(x+y)_a}$$

Açıklama çok da gerekli görünmemekle beraber, şunları söylemiş oluyoruz:

a) Herhangi bir sayıya 1 eklemek, yani herhangi bir sayıyı 1 ile toplamak, o sayının ardılını elde etmekle aynı şeydir.

b) $x+y_a=x+(y+1)=x+y+1=(x+y)+1=(x+y)_a$

Bakın, şimdi b şıkkında ifade edilen açık değil mi? a şıkkında sadece bir ardıl kavramı yer alıyorken, onu temel alarak b şıkkını ispat ettik. Yani b ifadesi, aslında ardıl kavramının üzerine kurulmuş bir *sonuç*tur.

Burada, b şıkkını elde ederken kullandığımız, sizin doğal bir şeymiş gibi algılamış olabileceğiniz için belki farkına varmadığınız bir noktaya işaret etmeliyim: Bir temel önermeden ya da kabulden, onun üzerine inşa edilmiş bir sonuç elde edebilmek için matematikçiler daima "eğer p doğruysa o zaman q da doğrudur" şeklinde ilerler.

Burada görüyorsunuz:

Eğer $x+1=x_a$ doğru (p) ise $x+y_a=(x+y)_a$ doğrudur (q) sonucu elde ediyoruz.

Bunu sembolik olarak:

p ise q

şeklinde ifade ederiz.

Matematiğin olmazsa olmazı budur.

Bu seferlik burada durayım. Bazılarınızın " bu korktuğumuz matematik kalesinin temelleri bu kadar basit miymiş!" diye düşündüğünü görür gibiyim. Matematiğe güveninizi sarsmış olmayayım.

Hep söylüyorum:
Matematik sadece eğlenceli değil üstelik çok da kolay!

İşte bahar geldi. Doğa yeniden canlanıyor. Yeni bir başlangıç. Siz de matematiği sevmeye başlamak için bu fırsatı kullanın. Yaşam boyunca hizmetinizde olacak matematiği anlamak için bundan daha iyi bir fırsat olabilir mi?