ÜÇGENLERİN DÜNYASI – II

GEOMETRİDE DUALLİK İLKESİ

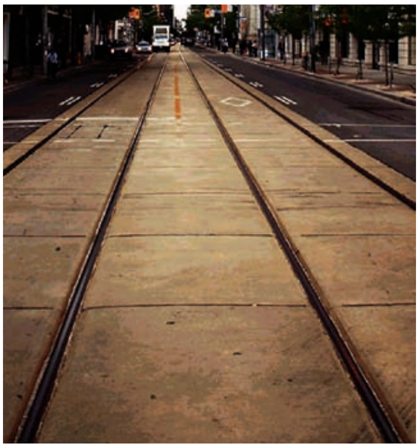
Öyle görünüyor ki geometri, insanoğlunun yeryüzünü ölçme ihtiyacından doğmuş. Bunu Latince kökenli geo ve metri kelimelerinin yer (dünya) ve ölçü anlamına gelmesinden anlayabiliyoruz. Öklid geometrisinin üç boyutlu dünyamızı ölçmek için oldukça kullanışlı bir yol olduğunu kabul etmek gerekir. Yine de Öklid dışı geometrilerin de varolduğunu ve onların da bu anlamda işimize yarayabileceğini bilmekte fayda var. Hatta bu yeni geometrilerden bazıları Öklid geometrisinin çözümlemekte yetersiz kaldığı yerlerde devreye girebiliyor.

Aksiyomatik Sistemler

Bilindiği üzere Öklid geometrisi, 5 aksiyom (belit) üzerine kurulmuştur:

1. Her hangi iki nokta, bir doğruyla birleştirilebilir.
2. Sonlu bir doğru parçası, istenildiği kadar uzatılabilir.
3. Çember, merkez ve üzerinde bir nokta ile tarif edilebilir.
4. Bütün dik açılar birbirine eştir.
5. Verilen bir doğruya, kendisi dışındaki bir noktadan yalnız ve ancak bir paralel doğru çizilebilir.

Bugün yaygın olarak tanınan geometrinin temelinde bu beş değişmez cümle yatıyor. Öklid geometrisi uzaklık, açı, paralellik gibi pek çok kavramı koruyor. Fakat şu bir gerçek ki, fotoğraflar perspektifden dolayı bu kavramları korumaz. Bunun en tipik örneği, paralel giden iki demiryolu çizgisini ileride bir noktada (aslında gözümüzün gördüğü en son noktada) birleşmiş olarak görmemizdir. Oysa ki birleşmediğini biliyoruz. Hatta beşinci aksiyom, bize iki paralel doğrunun asla kesişmeyeceğini de söylüyor. Öyleyse, emektar geometri böyle bir fotoğraf karesinde yetersiz kalıyor. Hemen, bu yetersizliği matematiğin çaresizliği olarak düşünmekte acele etmeyin! Çünkü matematiğin bu problemi nasıl çözdüğünü görünce, onun problem çözme konusundaki yeteneğine bir kez daha hayran olacaksınız.



Yeni bir Geometri Doğuyor!

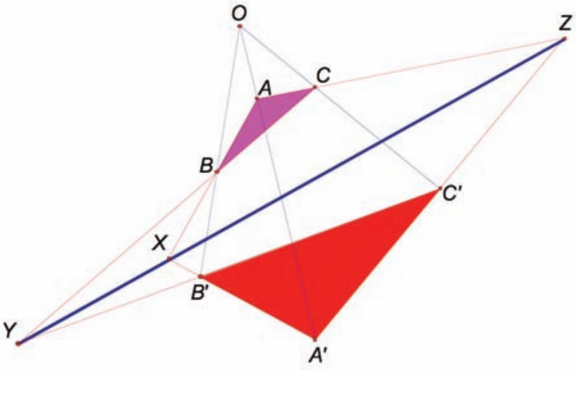
Matematik bir cümleye değişmez demişse, o cümle değişmezdir; ama yazıldığı kuram içinde! “Ben farklı bir kuram yazıyorum” deyip de o cümlelerin tamamen terslerini doğru kabul eden aksiyomları sıralarsanız, onlar da doğrudur; ama sizin kuramınız içinde. Tabii bir de yazdığınız aksiyomların kendi içinde tutarlı olması gerektiğini unutmayın. Aynı kuram içinde hem “a doğrudur” hem de “a yanlıştır” ifadeleri yer alıyorsa, o kuram baştan çökmüş demektir. Öklid bu beş aksiyomu hem birbiri ile tutarlı hem de biri diğerinden elde edilmeyecek şekilde düzenlemiş. Hatta Öklid’den sonra birçok matematikçi, beşinci postulatın diğerlerinden elde edilebileceğini ispatlamaya çalışmışsa da başarılı olamamış. En sonunda beş aksiyomun da birbirinden bağımsız olduğu ispatlanarak bu tartışmaya son nokta konmuş. Kuramdan “a doğrudur” aksiyomunu çıkarıp “a yanlıştır” aksiyomunu eklerseniz yine tutarlı bir sistem elde edersiniz ve bu da yeni bir geometri anlamına gelir. Ama pek çok teorem ya da tanım görüntü değiştirecektir. Elimizdeki fotoğraf karesindeki paralel doğrular bir noktada birleşiyor; öyleyse “*Paralel doğrular bir noktada kesişir*” cümlesini doğru kabul eden farklı bir kuram yazmak, karşılaştığımız problemi çözmek için akla gelen ilk yoldur. Bu, kısaca beşinci postulatın hükmünü sona erdirip yerine bu yeni aksiyomu koymaktan başka bir şey değildir. Projektif Geometri adı altında yazılan yeni kuramda birkaç hafif değişiklik yapılmış olsa da (uzunluğun ve açıların her dönüşüm altında korunmaması gibi) en büyük değişiklik paralel doğruları kesiştirmek denebilir. İlginç bir şekilde, bir değişmezin değiştirilmiş olmasına karşın Öklid geometrisindeki pek çok teorem, bu kuramda da aynen çalışıyor. Ama şunu da eklemekte fayda var ki, kuramın bundan çok daha ilginç ve dikkat çekici başka bir özelliği var!

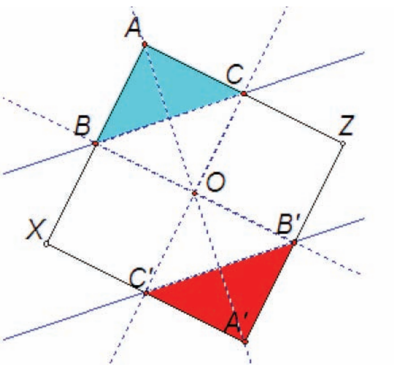
Deargues Teoremi

Perspektif kavramının kilit noktayı oluşturduğu projektif geometrinin kurucularından birinin aslen bir mühendis olması, çok şaşırtıcı değil. 16. yüzyılda yaşamış bu Fransız matematikçi ve mühendis Girard Desargues’ın teoremi şöyle:

ABC ve A’B’C’ üçgenlerinin $(A \neq A'; B \neq B'; C \neq C')$ sırasıyla AA’, BB’ ve CC’ doğrularının tek bir noktada kesişmesi için yeter ve gerek şart, üçgenlerin AB ve A’B’; BC ve B’C’; CA ve C’A’ doğrularının kesim noktalarının doğrusal olmasıdır.

Öklid geometrisi, bu teoremin çok genel durumlarını oldukça şık bir şekilde ispatlıyor. İspat için bir önceki yazımızda bahsettiğimiz Menelaus Teoremini üç kere kullanmak yetiyor. Bu ipucu üzerine oldukça kolaylaşan ispatı, okuyucumuza bırakıyoruz. Ama bazı özel durumları mercek altında incelemekte fayda var; çünkü o noktalarda Öklid geometrisi ihtiyacı karşılamıyor.





Bu şekil AXA'Z karesinin kenarlarının orta noktalarından dörde bölünmesiyle elde edilmiştir. (B,C,B',C' üzerinde bulundukları doğru parçalarının orta noktalarıdır) AA', BB',CC' doğrularının köşegenlerin kesim noktası olan O'da birleştikleri açıkça görülebilir ki, bu noktada Desargues teoremini uygulayabiliriz. Hipotez sağlandığına göre AB ve A'B'; BC ve B'C'; CA ve C'A' doğrularının kesim noktaları doğrusal olmalı ama BC ve B'C' doğruları birbirine paralel. İki paralel Öklid geometrisi içinde kesişemeyeceğinden, bir kesim noktasından bahsedemeyiz. İşte bu noktada devreye projektif geometri giriyor ve iki paralel doğruyu "sonsuz" denen noktada birleştiriyor: $Y \to \infty$. Bu hayali nokta, X ve Z'yle doğrusal olarak kabul edilebilir ve teoremin sınırlarının Öklid Geometrisinden daha geniş olması gerektiğini de ortaya koyuyor!

Duallik

"Daha sonra neredeyse hiç ısıtılmayan tren kompartımanında, gazetenin kenarına B kalıbından aklımda kalanları çiziktirdim. Tren Cambridge'e yaklaşırken iki veya üç zincirli modeller arasında bir karar vermeye uğraşıyordum...Bisikletle koleje dönüp arka kapıdan tırmanırken iki zincirli bir model inşa etmeye karar verdim. Bunu elbette Francis de beğenecekti. Her ne kadar fizikçiyse de biyolojide önemli şeylerin çiftler halinde ortaya çıktığını bilirdi" (James D. Watson, 1996, p. 121,122)

DNA'nın yapısını Francis Crick'le birlikte çözerek 1962 Nobel ödülünü alan James Watson, sarmal yapının iki zincirli bir modele sahip olabileceğine karar verdiği anı böyle anlatıyor kitabında. Bu kararın ardından DNA'nın yapısı ardındaki sır perdesi açılıyor ve yüzyılın en önemli buluşlarından biri ortaya çıkıyor. Aslında *"çiftler halinde ortaya çıkma"*, sadece biyolojiye has bir durum değil. Geometride de ilginç bir duallik kavramı sözkonusu. Bu kavram, biyolojide birbirinin duali olarak düşünebileceğimiz erkek-dişi çifti kadar aşikar mı, değil mi ona siz karar verin.

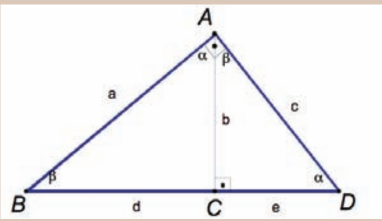
Bir Teoremin Duali

Fransız geometrici Joseph Gergonne, 1810 yılında yayımlamaya başladığı bir dizi makalesinde projektif geometride düzlemdeki, her nokta ve doğruyu birleştiren teoremin duali olan ifadenin de doğru bir ifade olacağından bahsetmiştir. Bu prensip basitçe, iki teorem arasında kurulan bir örnekseme olarak açıklanabilir. Sözgelimi, bir teoremin dualini bulmak için ifadenin içinde geçen noktalar doğrularla, doğrular noktalarla ve hatta "çakışık" ifadesi "doğrusal" ifadesiyle değiştirilir. Örneğin projektif uzayda *"iki farklı nokta bir doğru belirtir"* ifadesinin duali *"iki farklı doğru bir nokta belirtir"* şeklindedir. Bu, şu anlama gelmektedir. Projektif uzayda iki farklı doğru mutlaka bir noktada kesişir (paralel olsa bile!) ki, bu da o doğruların belirttiği noktaya denk gelir. Bu oldukça ilginç özelliğin getirisi muhteşem. Kuramın yarısını üretmeniz demek, tamamının kendiliğinden ortaya çıkmış olması demektir. Önümüzdeki sayımızda geometrinin oldukça çarpıcı başka teoremleriyle ve birbirine dual olan teoremlerle devam edeceğiz. Sizler bu arada geometriyi daha derinden karıştırmaya ve ispatlar üzerinde çalışmayı ihmal etmeyin.

Bir Buluşum Var

Merhaba

İlk önce şunu söylemek isterim ki, bana böylesine güzel bir dergide yer ayırdığınız için teşekkür ederim. Ben İzmir Anadolu Öğretmen Lisesi II sınıf öğrencisiyim. Bilim ve Teknik Dergisini ilköğretimden beri imkanlarım dahilinde takip ediyorum. Dersler arasında geometriye karşı aşırı bir tutkum var. Özellikle üçgenler konusu. Dik üçgenlerle ilgili bir bağıntı elde ettim ve bunu sizlerle paylaşmak istiyorum. Buluşumun son basamağında Öklid bağıntısını elde ettim. Buluşumu hiç bir kitapta görmediğim için bunun küçük bir teorem olabilme ihtimali olduğunu düşündüm ve size değerlendirmeniz için gönderdim.



ACD dik üçgeninde Kosinüs teoreminden:

$$b^2 = c^2 + e^2 - 2e \cdot c \cdot \cos\alpha$$

ABC dik üçgeninde Kosinüs teoreminden

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\alpha$$

İkisinin ortak çözümü:

$$\frac{b^2 - c^2 - e^2}{-2 \cdot e \cdot c} = \frac{d^2 - a^2 - b^2}{-2 \cdot a \cdot b}$$

$$\frac{-2e^2}{-2e \cdot c} = \frac{-2b^2}{-2a \cdot b} \Rightarrow \frac{e}{c} = \frac{b}{a}$$

$$e \cdot a = b \cdot c \quad (1)$$

ACD dik üçgeninde Kosinüs Teoreminden

$$e^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\beta$$

ABC üçgeninde Kosinüs Teoreminden

$$b^2 = a^2 + d^2 - 2a \cdot d \cdot \cos\beta$$

$$\frac{e^2 - b^2 - c^2}{-2 \cdot b \cdot c} = \frac{b^2 - d^2 - a^2}{-2 \cdot a \cdot d}$$

$$\frac{-2b^2}{-2b \cdot c} = \frac{-2b^2}{-2a \cdot d} \Rightarrow \frac{d}{a} = \frac{b}{c}$$

$$d \cdot c = a \cdot b \quad (2)$$

(1) ve (2)'den:

$$c = \frac{a \cdot e}{b} = \frac{a \cdot b}{d} \Rightarrow b^2 = e \cdot d (Öklid)$$

(1) ve (2) numaralı buluşlara hiçbir kitapta rastlamadım. İspatını da Kosinüs teoreminden faydalanarak buldum. Ve size soruyorum. Bunların teorem olabilme ihtimali var mı?

Aykut Çelikel

Aykut arkadaşımıza çalışmasını bizlerle paylaştığı için teşekkür ederek söze başlamak istiyoruz. Kendisinin çizdiği şekil (ABD üçgeni) Öklid bağıntıları olarak bilinen bir dizi teoremden dolayı o kadar gözönünde olan bir figür ki, buradan daha önce bulunmamış bir şeyler çıkartmış olma fikri bile insanı kuşkuya düşürebiliyor. Yine de "neden olmasın" demekte de fayda var. Elde ettiği (1) ve (2) numaralı ifadeler pek çok kitapta bağıntı olarak geçmese de, bunlara soru kısımlarında yer veriliyor. Bu soruların içinde geçtiği asıl konu ise "Üçgenlerde Benzerlik". Açı-Açı-Açı özelliğinden dolayı ABC ve DAC üçgenleri birbirine benzerdir. (ikisinin de içaçıları: α-β-90°) bu da otomatik olarak denk gelen açıların karşılarındaki kenarların orantılı olduğunu gösteriyor:

$$\frac{d}{b} = \frac{b}{e} = \frac{a}{c}.$$

Bu üçlü orantının içinde (1) ve (2) numaralı bağıntıların yeraldığı da açıkça görülebiliyor. Sonuç olarak bu bilgiye teorem adı versek bile, yeni bir buluş olmadığını görebiliyoruz. Bu arada Öklid bağıntısının ispatı da yapılmış oldu.

Nilüfer Karadağ
karadagnilufer@yahoo.com

Eğer siz de kaydettiğiniz önemli bir bulgu olduğunu düşünüyorsanız dergimize gönderin ve onu sizin için değerlendirelim.
Adresimiz: TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi, Buluşumu Değerlendirin Köşesi, Atatürk Bulvarı No:221 Kavaklıdere-ANKARA