MATEMATİK SÜRPRİZLER

Pitagor, 1'den başlıyarak birbirlerini izliyen tek sayıların toplanmasının birbirlerini izleyen sayıların tam karelerini verdiğini bulmuştu :

$$
\begin{aligned}
&1 + 3 = 2^2 \\
&1 + 3 + 5 = 3^3 \\
&1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 \\
&1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2
\end{aligned}
$$

Bunu cebirsel ve geometrik olarak ispatlamaya çalışın.

Eski Yunan'da bundan 2000 yıl kadar önce Nikomah'ın bulduğu teoreme gelelim, bunun için 1'den başlıyan tek sayıları altalta sırayla öyle yazalım ki birinci satırda 1, ikinci satırda 2, üçüncü satırda 3... tek sayı bulunsun. Her satırdaki sayılar arasına artı işareti koyalım, aşağıda görüldüğü üzere her toplam terim sayısının kübüne eşittir :

$$
\begin{aligned}
&1^3 = 1 \\
&2^3 = 3 + 5 \\
&3^3 = 7 + 9 + 11 \\
&4^3 = 13 + 15 + 17 + 19
\end{aligned}
$$

Bunun doğruluğunu cebirsel olarak kanıtlamak daha güç, fakat daha ilginçdir.

Pitagor bundan başka şunu göstermiştir : 1 hariç bütün tek sayılar iki sayının karesinin farkı olarak yazılabilir, bu iki sayı toplamları o tek sayıyı veren ve aralarında 1 fark bulunan iki sayıdır :

$$
\begin{aligned}
3 &= 2^2 - 1^2 \\
5 &= 3^2 - 2^2 \\
7 &= 4^2 - 3^2 \\
9 &= 5^2 - 4^2
\end{aligned}
$$

Şimdi karelerin simetrik toplamalar şeklinde açılışını veren formülleri görelim :

$$
\begin{aligned}
2^2 &= 1 + 2 + 1 \\
3^2 &= 1 + 2 + 3 + 2 + 1
\end{aligned}
$$

L. Trunkovski gösterdi ki bir sayının herhangi bir kuvvetini o sayıya kadar olan sayıları ışınsal bir biçimde yazıp toplıyarak elde edebiliriz, örneğin 3^3 ü şu şekilde yazabiliriz :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & & & & 1 & & & & 1 \\
 & + & & & + & & & + & \\
 & & 2 & & 2 & & 2 & & \\
 & & & + & + & + & & & \\
1 & + & 2 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
 & & & + & + & + & & & \\
 & & 2 & & 2 & & 2 & & \\
 & + & & & + & & & + & \\
1 & & & & 1 & & & & 1
\end{array}
$$

Trunkovski bir sayının üssünün (m^n) kaç ışın biçiminde yazılabileceğini veren formülü de bulmuştur :

$$K = 2\ (m^{n-2} + m^{n-3} + m^{n-4} + \ldots + m + 1)$$

Bu formülü 3^3 e uygulayalım : $K = 2\ (3^1 + 1) = 8$. Gerçekten de üçün kübünü ışınsal olarak yazabilmek için 8 ışın gereklidir. Buna karşı bu formülü 3^5 e uygularsak 80 elde ederiz, yani 1 + 2 ışınını 3 merkezi etrafında 80 kere yazarsak bu toplam 3^5 i verir.

Şimdi matematikdeki ünlü formülü görelim :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \kappa^2 = \frac{(2\kappa + 1)\,\kappa\,(\kappa + 1)}{6}$$

Bu formül aşağıdaki şekle çevrilebilir :

$$
\begin{aligned}
(2\kappa+1)^3 - (2\kappa+1) &= 2^2 \cdot (2\kappa+1) \cdot \kappa \cdot (\kappa+1) = 6 \cdot 2^2 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + \kappa^2) = \\
&= 6 \cdot [2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2\kappa)^2]
\end{aligned}
$$

Şimdi bu noktadan hareket ederek tek sayıların küpünü veren G. Somehberuyev formülünü elde edebiliriz :

$$(2\kappa + 1)^3 = 6[2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2\kappa)^2] + (2\kappa + 1).$$

Örneğin $K = 4$ alırsak :

$$9^3 = 6\ (2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2) + 9.$$

Çift sayıların kübü için benzer tekniği kullanalım :

$$(2\kappa)^3 - 2\kappa = 2\kappa(4\kappa^2 - 1) = 6[1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2\kappa - 1)^2]$$

Formülün son kısmı için bir diğer ünlü matematik formül kullandık :

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2\kappa - 1)^2 = \frac{\kappa\,(4\kappa^2 - 1)}{3}.$$

Bir önceki formülden şu ifadeyi yazabiliriz :

$$(2K)^3 = 6\left[1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2K-1)^2\right] + 2K.$$

Şimdi de bir sayının 4.kuvvetini veren formülü bulalım :

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2K-1)^3 = K^2(2K^2 - 1).$$

$$2K^4 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2K-1)^3 + K^2$$

$$K^4 = \frac{1}{2}\left[1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2K-1)^3 + K^2\right].$$

$$4^4 = \frac{1}{2} \cdot (1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 4^2).$$

Gelelim bir diğer teoreme : Birbirini bir sayı farkla izleyen dört sayı alıp birbirlerine çarpın ve sonuca bir ekleyin, sonuç daima bir kare olacaktır :

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25 = 5^2$$
$$2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121 = 11^2$$
$$3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 361 = 19^2$$
$$4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 841 = 29^2$$
$$5 \times 6 \times 7 \times 8 + 1 = 1\,681 = 41^2$$
$$\ldots$$
$$53 \times 54 \times 55 \times 56 + 1 = 8\,815\,961 = 2\,969^2.$$

Birbirini iki sayı farkla izleyen dört sayı alıp birbirine çarpın ve sonuca 16 ekleyin, sonuç daima bir karedir :

$$2 \times 4 \times 6 \times 8 + 16 = 400 = 20^2$$
$$4 \times 6 \times 8 \times 10 + 16 = 1\,936 = 44^2$$
$$6 \times 8 \times 10 \times 12 + 16 = 5\,776 = 76^2$$
$$8 \times 10 \times 12 \times 14 + 16 = 13\,456 = 116^2$$

NAUKA-I JIZN'den

Çeviren : Dr. Selçuk ALSAN

Not : Yukardaki yazıdan esinlenerek kendi kendime çalışarak diğer bazı formüller buldum, onları da veriyorum :

(1) $K^2 = 2 + 4 + 6 + \ldots \ldots + 2(K-1) + K$

Bir örnek : $9^2 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 9$

(2) $K^2 = K(K-1) + K$

Örnekler : $3^2 = 3 \times 2 + 3$

$4^2 = 4 \times 3 + 4$

(3) $K^3 = K^2(K-1) + K^2$

Örnekler : $3^3 = 3^2 \times 2 + 3^2$

$4^3 = 4^2 \times 3 + 4^2$

Formülleri aslında daha da genelleştirebiliriz :

(4) $K^2 = K(K-n) + n \times K$

$15^2 = 15 \times 10 + 5 \times 15$

(5) $K^3 = K^2(K-n) + n \times K^2$

$15^3 = 15^2 \times 10 + 5 \times 15^2$

Formülü aslında herhangi bir üs için kullanacak şekilde genelleştirebiliriz :

(6) $K^m = K^{m-1} \times (K-n) + n \times K^{m-1}$

Örnek : $10^9 = 10^8 \times 6 + 4 \times 10^8$

Bir sayının katlarını toplamak onun küpünü vermektedir :

(7) $K^3 = 2\left[K + 2K + 3K + \ldots + K(K-1) + \frac{K^2}{2}\right]$

Örnekler : $7 + 14 + 21 + 28 + 35 + 42 + 49 + 42 + 35 + 28 + 21 + 14 + 7 = 7^3$

$5^3 = 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 20 + 15 + 10 + 5$

(8) $K^3 = K(1 + 2 + 3 + \ldots + K) + K[1 + 2 + 3 + \ldots (K-1)]$

Örnekler : $4^3 = 4(1 + 2 + 3 + 4) + 4(1 + 2 + 3)$

$3^3 = 3(1 + 2 + 3) + 3(1 + 2)$

Merak eden okuyucular için birkaç önemli formülün cebir yolu ile kanıtlanmasını veriyorum. 1'den başlıyarak tek sayıları toplarsak daima bir kare çıkacağının ispatı : 1'den n'e kadar olan çift sayıların toplamı (n tek sayı olmak üzere) $\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)$ dir. 1'den n'e kadar olan sayıların toplamı ise

$\frac{n(n+1)}{2}$ dir, (aritmetik dizi kuralı). Bu ikisi arasındaki fark tek sayıların toplamıdır ve $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ olarak çıkmaktadır, yani bu fark daima karedir.

Tek sayıların iki kare farkı oluşu :

$$n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2.$$

Tek sayıların küpü :

$(2K+1)^3 - (2K+1)$ ifadesinde $a = 2K + 1$ kabul edersek bu ifadeyi $a^3 - a$ olarak yazabiliriz, $a^3 - a = a(a+1)(a-1)$. a'nın yerine $2K + 1$ koyarsak $2^2(2K+1)K(K+1)$ yi buluruz. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + K^2 = \frac{(2K+1)K(K+1)}{6}$ formülünden de yararlanarak formül son şeklini alır.

$2 + 4 + 6 + \ldots + 2(K-1) + K = K^2$ nin ispatlanması :

$2 + 4 + 6 + \ldots + 2(K-1) + K =$

$2\left[1 + 2 + \ldots (K-1) + \frac{K}{2}\right]$

Parantez içindeki ifade son terimi hariç 1'den K − 1'e kadar olan sayıların toplamıdır : $\frac{K(K-1)}{2}$ Yerine koyalım : $K(K-1) + K = K^2$ bulunur.

Bir sayının katlarının toplamının küpünü verdiğini kanıtlamak :

$K + 2K + 3K + \ldots + K(K-1) + K^2 + K(K-1) + \ldots + 3K + 2K + K = 2K\left[1 + 2 + 3 + \ldots + (K-1)\right] + K^2$

1'den K − 1'e kadar olan sayıların toplamı $\frac{K(K-1)}{2}$ olarak yerine konursa yukarki ifade $K^2(K-1) + K^2 = K^3$ şeklini alır.

Dr. Selçuk ALSAN