Serüvene Devam

Pi ile Bir Gezinti

Geçen sayıda *pi* ile bir gezintiye çıkmış ve ünlü Fransız matematikçi François Viète ile de kısa bir mola vermiştik. Gelin isterseniz, kaldığımız yerden serüvenimize devam edelim, ama öncelikle son olarak ele aldığımız Viète'nin o ilginç eşitliğini bir kez daha hatırlayalım:

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

(?) ... Ve işte kanıtı.

Önce birim yarıçapa sahip bir daireyi ele alalım. Bu durumda θ=45° iken, secθ kirişler karesinin bir kenarını verecektir. Aynı şekilde, düzgün kirişler sekizgeninin iki kenar toplamı da secθ.sec(θ/2); düzgün kirişler onaltıgeninin dört kenar toplamını da secθ.sec(θ/2).sec(θ/4) verecek ve böyle devam edecektir. Böylelikle

secθ.sec(θ/2).sec(θ/4)... $\rightarrow\pi/2$

olacak, yani çeyrek dairenin uzunluğuna yakınsayacaktır. Dolayısıyla

$2/\pi$=cosθ.cos(θ/2).cos(θ/4)... elde edilecektir.

Şimdi de

$$\cos\theta=\sqrt{2}\,/\,2 \text{ ile}$$

$$\cos(\theta/2)=[(1+\cos\theta)/2]^{1/2}$$

$$\cos(\theta/4)=[\{1+\cos(\theta/2)\}/2]^{1/2}$$

ve devam eden eşitlikleri kullanırsak, sözkonusu çarpıma ulaşacağımız açıktır. (Not: Bu eşitliği geçen sayıda kanıtladığımız ve Arşimet'in de kullandığı düzgün kirişler çokgenlerinin kenar uzunluklarına dair formülden yararlanarak çözmeniz de mümkün).

Bu gelişmelerden 6 yıl sonra, yani 1585'te ise, Adriaen Anthoniszoon eski Çin oranı 355/133'ü yeniden keşfetti. Görünen o ki, bu oldukça şanslı bir rastlantıydı; çünkü gösterilen tek şey

$$\frac{377}{113}>\pi>\frac{333}{106}$$

eşitsizliği olmuştu. Daha sonra pay ve paydaların ayrı ayrı ortalaması alınarak bu kesin değer ortaya atılmıştı. 1593'te adaş bir matematikçi Hollandalı Adriaen Van Roomen, *pi* yi 15 ondalık basamağına kadar doğru buldu ve de klasik metodu uygularken 2^{30} kenarlı çokgenler kullandı. 1610 yılında yine bir Hollandalı, Ludolph van Ceulen, *pi* nin 35 ondalık basamağını 2^{62} kenarlı çokgenleri klasik metodda kullanarak elde etti. Bu iş için hayatının büyük bir kısmını harcadığı ve başarısı oldukça olağandışı göründüğünden (ki 2^{62} kenarla oturup hesap yapmak hiç kolay iş değil), dul eşi şimdi kayıp olan mezar taşına bu sayıyı yazdırmıştı. Bu nedenle günümüzde bu sayıya "Ludophine sayısı" olarak da rastlanmaktadır. 1621'de karşımıza yine bir Hollandalı bilim adamı çıkmaktaydı: Willebrord Snell. Sneell, *pi* yi hesaplamak için klasik bir metodu trigonometrik olarak geliştirmiş ve bu sayede *pi* için daha yakın sınır değerleri saptaması mümkün olmuştu. Bu metodla van Ceulen'in ömrünü verdiği *pi* nin 35 ondalık basamağını yalnızca 2^{30} kenarlı çokgenlerle elde edebilmişti. Oysa klasik metod bu kenar sayısıyla ancak 15 ondalık basamağı vermekteydi. Diyebiliriz ki, Snell bu yeni açılım sayesinde pek çok matematikçinin ömrünü de uzatmış oluyordu. Bu arada ancak 1654 yılında Snell'in bu açılımının doğru ispatı getirilebilmişti. O da yine bir Hollandalı'dan; matematikçi ve fizikçi Christaan Huygens'den. Son olarak Grienberger'in Snell'in bu yeni açılımını kullanarak elde ettiği 32 ondalık basamakla (1630) hem çevre uzunlukları kullanılarak *pi* hesaplamaları yapılması hem de *pi* üzerinde uzun müddet devam eden Hollandalı matematikçi egemenliği son buluyordu.

Artık 17. yüzyılın sonlarıydı ve İngiliz matematikçi John Wallis (1650) ilginç bir ifade bulmuştu:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.8.8...}{1.3.3.5.5.7.7...}$$

Ne yazık ki bu ifade *pi* nin daha geniş hesaplamalarında hiçbir katkıda bulunmamıştı. Ancak ardından (1671) İskoç metamatikçi James Gregory

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$$

$$(-1\leq x\leq 1)$$

serisini elde etti. Böylece Gregory tarafından not düşülmüşse de x=1 için şu seri elde ediliyordu:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

..Ve ardısıra 1699'da Abraham Sharp $x=\sqrt{1/3}$ ü Gregory'nin serisine koyarak *pi* nin 71 ondalık basamağını bulurken John Machin de aynı seriyi

$\pi/4$= 4arctan(1/5)- arctan(1/239)

eşitliği ile birlikte kullanarak 100 ondalık basamağa ulaşıyordu. 1719 yılında Fransız De Lagny x için Sharp'la aynı değeri kullanıp 112 ondalık basamağı elde etti.

(?) Machin'in kulandığı yukarıdaki eşitliğin ispatı da artık sizden.

F. Lindemann,1882 yılında, pi nin üstünlüğünü (transandant olduğunu) matematik camiasına duyurdu.

(İpucu: tan(4arctan(1/5)-arctan(1/239))=1 ifadesini elbette bir tanjant açılımı ile birlikte kullanmanız yeterli olacaktır.)

İyi güzel de tüm bu ifadeler içinde kullandığımız π sembolü ne zaman ortaya çıkmıştı? Bu sembol aslında önceki dönemlerde İngiliz matematikçileri William Oughtred, Isaac Barrow ve David Gregory tarafından dairenin çevresini temsil etmek için kullanılıyordu. π yi çevrenin çapa oranı olarak ilk kullanansa, 1706'da basılmış bir yayınıyla, İngiliz yazar William Jones idi. Ancak sembol bu haliyle fazla kabul edilmemiş, üstad Euler 1737'de bir bakıma bu sembolü sahiplenerek belirsizliğe son vermişti.

Peki, bu *pi* nasıl bir sayıydı? Eli yüzü düzgün müydü? Şaka bir yana; *pi* nin rasyonel olup olmadığı, yani a ve b tamsayı olmak üzere a/b olarak yazılıp yazılamayacağı hep merak konusu olmuştu. Bu yüzden matematikçiler *pi* nin ondalık basamaklarıyla uğraşıp durmuşlar, bir yerlerde basamakların önceki değerlerini tekrar etmesini beklemişlerdi. Böylelikle *pi* devirli bir ondalık sayı halinde yazılabilir ve rasyonel olduğu söylenebilirdi. Ancak bir türlü o tekrar eden basamaklar gün ışığına kavuşmadı ve sonunda (1767) Johann Heinrich Lambert tüm bu umutlara son verdi: *Pi* nin *irrasyonel* olduğunu kanıtlamıştı.

1777 yılında *pi* ye çok farklı bir şekilde ulaşılmaya çalışıldı. Comte de Buffon ünlü "iğne problemi"ni geliştirmiş; böylelikle olasılık metodlarıyla *pi* için yaklaşık değerler verilebilmeye başlanmıştı. Nasıl mı? Yatay bir düzlem üstünde, birbirinden a kadar uzaklıkta dizilmiş paralel doğrular düşünün ve $l<a$ iken uzunluğu l olmak üzere homojen düzgün bir çubuğun rastgele bu düzlemin üstüne düşürüldüğünü varsayın. İşte Buffon'ın gösterdiği bu çubuğun düzlemdeki doğrulardan birinin üstüne düşme olasılığını, $p=2l/\pi a$ ifadesinin verdiğiydi. Bu deneyi oldukça fazla sayıda tekrarlayıp başarılı durumları not alarak yukarıdaki formülle *pi* ye yaklaşık bir değer elde etmek elbette mümkündü. Bu yolla elde edilen en iyi sonuç ise 1901'de İtalyan Lazzerini'den geldi. Topu topu 3408 kez çubuğu atmak suretiyle *pi* nin 6 ondalık basamağına ulaşabilmişti! Emin olun, onun bu sonucu bu yolu deneyenlerin elde ettiklerinden kat kat iyiydi. 1904 yılında da, R. Chartres bilinen bir gerçeğin uygulamasını ortaya koydu; rasgele yazılan iki pozitif tamsayının aralarında asal olma olasılığı $6/\pi^2$ idi.

Yıl 1794 ve Adrien-Marie Legendre π^2 nin irrasyonelliğini gösteriyordu.

1841'de İngiltere'den William Rutherford, daha sonra ancak 152'sinin doğru olduğu tespit edilen, *pi* nin 208 ondalık basamağına ulaştı. Bunun için de Gregory'nin serisini şu eşitlikle birlikte kullandı:

$\pi/4$=4arctan(1/5)-arctan(1/70)+arctan (1/99)

1844 yılında, doğal bir hesap makinesi olan Zacharias Dase *pi* nin 200 ondalık basamağını doğru olarak elde etti. Ancak onun yetenekleri bununla sınırlı değildi. 8 basamaklı iki sayıyı 55 saniyede, 20 basamaklı olanları iki dakikada, 40 basamaklıları kırk dakikada ve 100 basamakları da 2 saat 45 dakikada çarpabiliyordu. Yine 52 dakikada aklıyla 100 basamaklı bir sayının karekökünü hesaplayabiliyordu. Hatta 7 000 000 ile 10 000 000 arasındaki sayıların çarpım tablosunu dahi oluşturmuştu. Ancak Dase genç bir yaşta, 37'sinde ölmüştü. Kimbilir belki daha uzun bir ömür, insanlığın bilgisayarlarla tanışmasını geciktirebilirdi(?!).

Artık *pi* nin basamaklarını hesaplamak bir yarış haline gelmişti. Önce Rutherford (1853) probleme geri dönüş yaptı ve 400 ondalık basamağı doğru olarak elde etti. Ardından yine bir İngiliz William Shanks (1873), Machin'in formülüyle uzun süren bir rekoru eline geçirdi: Tam 707 ondalık basamağı hesaplamıştı.

1882'de ise *pi* nin üstünlüğü tescil edildi. Tabii, bu *pi* nin matematiksel anlamda *üstün* (aynı zamanda "aşkın" ya da "transandant" sayı olarak da geçer) bir sayı olduğu anlamına geliyordu. Peki, bunun manası ne derseniz şuydu: Bir sayı rasyonel katsayılara sahip herhangi bir polinomun köküyse ona cebirsel denilir, eğer değilse, işte o zaman üstün sayı olarak adlandırılır. Bunu gösteren ise F. Lindemann olmuştu.

Artık *pi* de yeni bir yüzyıla adım atıyor ve 20. yüzyılın başdöndürücü buluşlarına o da bizzat şahit olmak fırsatını buluyordu. 1946 yılında İngiltere'den D.F. Ferguson Shanks'ın *pi* için verdiği değerde 528. basamaktan başlayan hatalar buldu ve Ocak 1947'de 710 basamaklı düzeltilmiş bir değeri açıkladı. Aynı ay Amerikalı J. W. Wrench, Jr. 808 basamaklı bir *pi* değeri yayınladı; ancak yine Ferguson daha sonra 723. basamakta bir hata buldu. 1948 Ocak ayıyla beraber, Ferguson ve Wrench birlikte 808 basamağa kadar düzeltilip kontrol edilmiş *pi* değerini yayınladılar. Wrench Machin'in formülünü kullanırken, Ferguson

$\pi/4=3\arctan(1/4)+\arctan(1/20)+\arctan(1/1985)$

formülünü kullanmayı tercih etmişti.

1949 yılında *pi* bilgisayarla tanıştı. Aberdeen, Maryland'deki Ordu Balistik Araştırma Laboratuarları'nda bulunan elektronik bilgisiyar ENIAC ile *pi* nin 2037 ondalık basamağı hesaplandı. Ardından arka arkaya çeşitli bilgisayarlarla *pi* nin daha fazla ondalık basamağı gün ışığına çıkarıldı. François Genuys, Wrench ile Daniel Shanks, M. Jean Guilloud gibi bilim adamları ayrı ayrı bu çalışmalarda yer aldılar ve 1973'te (Guilloud ve ekibi) *pi* yi 1 000 000'uncu ondalık basamağına ulaştırdılar.

1981 yılında *pi* nin üzerinde bu defa uzakdoğu rüzgarları esiyordu. Tsukuba Üniversitesi'nden iki Japon matematikçi Kazunori Miyoshi ve Kazuhika Nakayama FACOM M-200 bilgisayarı ile 137,30 saatte *pi* nin 2 000 038 hanesini hesapladılar. Bu esnada

$\pi=32\arctan(1/10)-4\arctan(1/239)-16\arctan(1/515)$

formülünü kullanırken, Machin'in formülüyle kontrol etmeyi de ihmal etmemişlerdi. (Ne de olsa, birinin çıkıp "1 398 271. basamakta hatanız var!" demesini istemezlerdi).

Ocak 1986'da Kaliforniya'da bulunan NASA Ames Araştırma Merkezi'nden D. H. Bailey 28 saat boyunca bir Cray-2 süper bilgisayarını çalıştırarak 29 360 000 basamağı elde etti. Bu hesaplamayı Dalhouise Üniversitesi'nden J. M. ve P. D. Borwein'ın algoritmasına dayanarak yapmıştı. Kısa bir süre sonra da Tokyo Üniversitesi'nden Yasumasa Kanada bir NEC SX-2 süper bilgisayarını yine Borweinlar'ın algoritmasıyla kullanarak, *pi* nin 134 217 700 basamağını elde etti. Son olaraksa Yasumasa Kanada'nın rekor kıran hesaplaması, yani *pi* nin 6 442 450 000 basamağı 1995 yılında elde edildi.

Elbette, *pi* için süren bu yarış devam edecek. Hem ondalık basamakları hesaplanacak hem de gizemli sayının özellikleri ortaya çıkarılmaya çalışılacak. Roma'nın doğuşunu ve batışını, istilaları, Fransız Devrimi'ni ve Soğuk Savaş'ı gören bu sayı, kimbilir daha kaç tarih sayfasında kendine yer açmayı becerecek. Bekleyip göreceğiz.

Büyük Salgın

Evet, doğru okudunuz. Bu salgının adı: morbus cyclometricus. Gerçi tedavisi bir asır önce Lindemann'dan geldi, ancak halen yan etkilerine rastlanıyor. "Nereden nereye?" demeyin. Çünkü bu hastalığın da sorumlusu, artık yakından tanıdığınız *pi*. Hastalığın en önemli belirtisi, alanı bir daireninkine eşit olan kare çizme isteği... Belki de bu hastalık, daha doğrusu bu problem, yeryüzünde böylesi çok ve uzun ilgiyi görmüş tek problem. M.Ö. 1800'lere dek uzanıyor tarihçesi. Önce problemi Mısırlılar "çözmüş". Karenin kenarını dairenin çapının 8/9'una eşit alarak işi halletmişler. Daha sonra eski Yunanlılar ele almış olayı. Anaxagoras, Sakızlı Hipokrat, Hippias, Dinostratus ve Arşimet bu soru uğrunda ter dökmüşler. Ardından da bu soruyu çözdüğünü iddia eden bir kişi olmaksızın tek yıl geçmemiş. Zaten bundan ötürü 1755'de, Fransız Bilimler Akademisi bir daha daireyi kare yapma sorusunun çözümlerini incelemeyeceğini açıklamış.

İşte bu soruyu "çözenlerden" biri de, Sieur Mathulon. Bir amatör olmakla beraber, o da bu sorunun büyüsüne kapılmış ve 18. yüzyılda soruyu çözdüğünü ilan etmiş. Hatta kendisine öyle çok güveniyormuş ki, çözümünün yanlış olduğunu ispatlayana 1000 ecu (5 Frank değerinde gümüş Fransız parasıdır.) ödeyeceğini taahhüt etmiş ve bu parayı mahkeme önünde de ödemek zorunda kalmış. Anlayacağınız, bu soru matematikçilerin yalnız zihinlerini değil keselerini de yoklamış.

Ancak 1882'de tüm umutlar Felix Klein'in öğrencisi Lindemann tarafından toprağa gömülmüş. Bu ismi önceki satırlardan hatırlamanız mümkün. Zaten daha önce yazdığımız; bulmuş olduğu özellik bu sorunun yanıtı olmuş. Fakat isterseniz, Lindemann'ın bu problem üstündeki rolünü anlamak için şu basit gerçeklere başvuralım: 1 birim uzunluktaki bir doğru parçası üstünde cetvel-pergel yardımıyla yapılan ölçümler yalnızca sonlu sayıda aritmetik işlemin (+, –, ., ÷) ve karekökün (√) uygulanmasıyla yeni uzunluklar ve kare alanları oluşturabilir. Bu şekilde elde edilebilen sayıların aynı zamanda birer "cebirsel sayı" olduğunu söylemek de doğru olur. İşte daha önce de bahsettiğimiz gibi, Lindemann'ın *pi* sayısının üstün olduğunu göstermiş olması; sorumuzun çözümünü olanaksız kılmıştır.

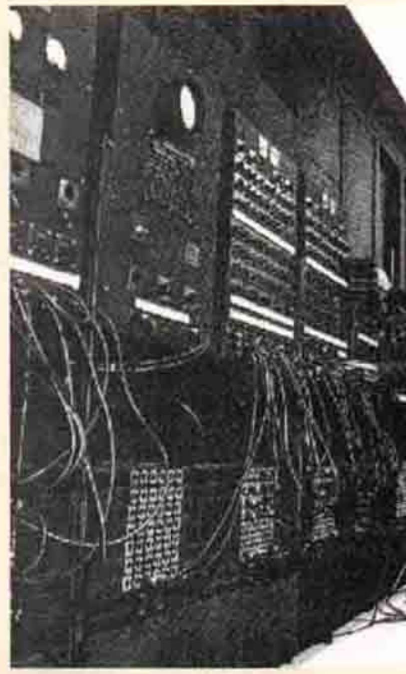
Pi için Değer Biçenler

Yazımıza son verirken *pi* nin uğradığı akıbetlerden de bahsetmeden geçmek istemedik. İlk örneğimiz, A.B.D. Indiana Eyaleti'nden? Olay, bir tıp doktoru olan Edwin Goodwin'in *pi* için yeni bir değer bulup, bunu yasalaştırmak istemesiyle başlıyor. Hatta öyle iyi niyetli davranıyor ki, telif hakkını alacağı bu yeni değer için Indiana eyaletinden hiçbir ücret talep etmeyeceğini tasarısında belirtiyor. Yasa tasarısında şu sözcükler yer alıyor: "... ayrıca 90°'lik kiriş uzunluğunun yay uzunluğuna oranı 7/8'dir. Öte yandan karenin köşegeninin kenarına oranı 10/7'dir ki, bu şu önemli dördüncü gerçeği ortaya koymaktadır: Dairenin çapının çevresine oranı 5/4'ün 4'e oranıdır..."

(?) İşte bu satırlarda bir çelişki ortaya çıkıyor. Son olarak bunu bulmakta yine size düşüyor.

(İpucu: Hareket noktanız, *pi* nin değeri olsun.)

246 no lu tasarı, Bataklık Arazi Komisyonu, Eğitim Komisyonu gibi çok ilgili komisyonlarca görüşüldükten sonra 1897'de 67 oya karşılık 0 oyla Temsilciler Meclisi'nde kabul ediliyor. Ardından Senato'ya ulaşan tasarı, Senato tarafından yine çok ilgili ve bilgili (?!) bir komisyon olan Alkollü İçkilerle Mücadele Komisyonu'na havale ediliyor. Ancak tasarının gazete sütunlarına yansıdıktan sonra tepkilere uğraması rafa kaldırılmasına sebep oluyor.



20. yüzyılın başdöndürücü hızıyla pi de ENIAC ile Maryland'de tanıştı.

1892 yılında ise New York Tribune gazetesinde bir yazar tarafından uzun yıllar bilinmeyen gizli bir keşfin duyurusu yapılıyor, *pi* nin tam olarak 3,2 değerine eşit olduğunun... Daha sonra bu yeni değer, pek çok taraftar toplamayı başarıyor. Tekrar 1931'de bu yazının yayınlanmasıyla beraber, Amerika'daki pek çok fakülte ve halk kütüphanesi yardımsever yazar tarafından gönderilip

$$\pi = 3 - \frac{13}{81}$$

eşitliğini gösteren kalın kitaplar alıyor.

İşte kendisine biçilen tüm bu değerlere karşın *pi*, halen gizemini koruyarak yeni matematikçilerin kapısını aralamasını bekliyor. Tabii, sizin de..

Han Nazmi Özsöylev

Bilkent Matematik Topluluğu

Kaynaklar

Büyük Larousse, cilt 18, Milliyet, İstanbul 1992

Eves, H., *An Introduction to The History of Mathematics*, Saunders College Publishing, 1990

Jacobs, K., *Invitation to Mathematics*, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1992

Tepedenlioğlu, N., *Kim Korkar Matematikten*, Amaç Yayınları, İstanbul, 1990

http://www.ast.univie.ac.at/wasi/PI/pi_club.html

http://www.groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Big-Pictures/Viete.jpeg

http://www.groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Big-Pictures/Lindemann.jpeg

Çözmece

1.

$$\pi = 4\sum_{r=1}^{\infty} \cot^{-1} 2r^2$$

olduğunu gösterin.

2. Bir dairenin n adet düzgün doğruyla bölünmesi sonucunda elde edilecek maksimum bölge sayısı kaçtır?

Geçen Ayın Çözümleri

1. $S'=\{\arctan s | s \in S\}$ olsun. O zaman

$$S' \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

olur ve S' 9 elemanlı bir küme olduğundan, farkları $\pi/8$ den az olan $\alpha_0=\arctan a_0$ ve $\beta_0=\arctan b_0$ gibi en az iki elemanı vardır.

$0<\alpha_0-\beta_0<\pi/8$ olduğunu varsayalım. O zaman

$$\frac{a_0-b_0}{1+a_0b_0} = \frac{\tan\alpha_0-\tan\beta_0}{1+\tan\alpha_0\tan\beta_0} = \tan(\alpha_0-\beta_0)$$

ve

$$0<\tan(\alpha_0-\beta_0)=\frac{a_0-b_0}{1+a_0b_0} < \tan\pi/8=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

olur.

2.

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x}{x-1} \quad (1)$$

eşitliğimizde, $x\neq 0,1$ olsun. O zaman $(x-1)/x\neq 0,1$ olur ve eğer (1)'de x yerine $(x-1)/x$ koyarsak

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f(x)=1-x \quad (2)$$

elde ederiz.

(2)'den (1)'i çıkarmamız bize

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)-f\left(\frac{1}{1-x}\right)=-x-\frac{1}{x-1} \quad (3)$$

verecektir. Şimdi (3)'te x yerine $(x-1)/x$ koyarsak bu bize

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)-f(x)=-\frac{x-1}{x}+x \quad (4)$$

verecektir.

(4)'ten (1)'i çıkarırsak da

$$2f(x)=\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}-x \quad (5)$$

elde ederiz.

Tersine, eğer f (5) ile tanımlanırsa, o zaman (1)'in de sağlandığı yine kolaylıkla elde edilebilir.