BU KİMİN ÜÇGENİ?

Prof. Dr. Ali Sinan Sertöz
Bilkent Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Matematik öğrenmeye başladığımız yıllarda bazı matematikçilerin adlarının bazı teoremlere verildiğini görür özenirdik. Bir gün bizim adımızla anılacak bir teorem buluruz diye umar hayallere dalardık. Güzel bir teorem bulursak herkes bunu takdir edecek ve bu teoreme bizim adımızı verecek sanırdık. Gençtik, saftık, temiz kalpliydik… Bu işlerin aslında öyle yürümediğini bilmezdik. Morris Marden de bir üçgenin içindeki sayısız muhteşemliklerden birini ortaya koyan ve kendisine ait olmayan bir teoreme, ölümünden on yedi yıl sonra, kendi adının verileceğini bilse ne kadar şaşırırdı kim bilir...

Yalın Geometri

Matematikte analiz ve özellikle sanal sayıların kullanıldığı karmaşık analiz matematikçilere çok güçlü teknikler sunar. Bu güçlü teknikleri kullanarak çözülen problemler bizi bir süre mutlu etse de bir süre sonra bu problem için bu kadar güçlü teknikler kullanmak gerekir miydi diye sormaya başlarız. Hiç analiz kullanmadan, yalnızca cebir ve temel prensipler kullanarak bu problem çözülebilir miydi? Hatta burada cebir ile kastettiğimiz lise eğitimiyle anlaşılabilecek cebirsel tekniklerin ötesi değildir. Böyle bir çözüm bulabilirsek buna yalın çözüm deriz. Matematik dünyasında işte böyle yalın çözümler bulmak çok makbuldür. Örneğin, asal sayıların dağılımı hakkında bilgi veren ve çok ağır karmaşık analiz teknikleriyle kanıtlanmış olan "asal sayı teoremi" için Paul Erdös ve Atle Selberg yalın bir kanıt bulunca yer yerinden oynamış ve bu çalışmayla Selberg 1950'de Fields Madalyası kazanmıştı.

Bir üçgenin barındırdığı gizemli bağıntılar da düzlemdeki koordinatlar yardımıyla yazılacak denklemlerin çözümleri ve analiz kullanılarak ortaya çıkarılabilir ama bu çok ayıptır! Makbul olan bu bağıntıları yalnızca temel ilkeler kullanarak, Öklid'in onaylayacağı akıl yürütmelerle, yani yalnızca yalın tekniklerle bulmaktır.

Temel kavramlar yardımıyla bir üçgenin sırlarını ortaya çıkarma oyununa yalın geometri denir. Bizim de bu konuda dünya çapında bir geometricimiz vardı, Hüseyin Demir. Ama önce Euler'den başlayalım.

Leonhard Euler (1707-1773)

Euler Dokuz Nokta Çemberi

Bir üçgen alalım ve bu üçgende aşağıdaki dokuz noktayı belirleyelim.

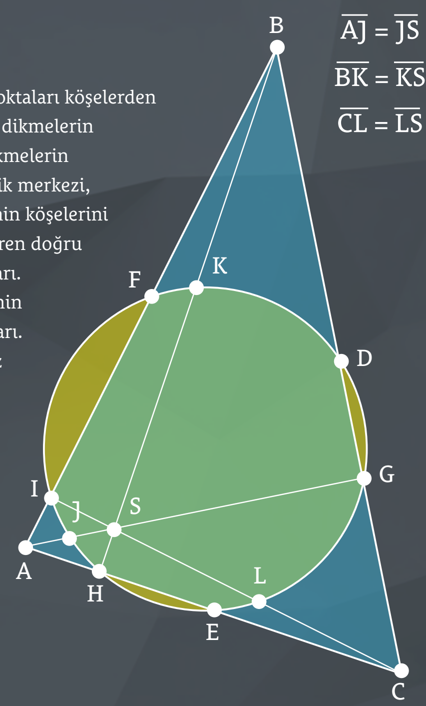
Tepe noktalarından karşı kenara çizilen dikmelerin bu kenarları kestiği noktalar bizim ilk üç noktamız olacak. Kenarların orta noktaları bize üç nokta daha verecek.

Yukarıda bahsettiğimiz dikmeler bir mucize sonucu aynı noktada kesişirler. Bu ortak noktaya üçgenin diklik merkezi denir. Köşeleri bu diklik merkezine birleştiren doğru parçalarının orta noktaları bize üç tane daha nokta verir.

Bu dokuz nokta aynı çember üzerindedir ve "Euler dokuz nokta çemberi" işte bu çemberdir.

Üçgenin tepe noktalarından karşı kenarların orta noktalarına giden doğrular, yani kenar ortaylar da bir başka mucize sonucu bir noktada kesişirler. Bu ortak noktaya üçgenin ağırlık merkezi ya da kısaca merkezi

ABC üçgeninde H, G, I noktaları köşelerden karşı kenarlara indirilen dikmelerin ayakları, S noktası bu dikmelerin kesiştiği nokta, yani diklik merkezi, J, K, L noktaları da üçgenin köşelerini diklik merkezine birleştiren doğru parçalarının orta noktaları. F, D, E noktaları da üçgenin kenarlarının orta noktaları. Sarı çember de bu dokuz noktadan geçen Euler Dokuz Nokta Çemberi. (Wikipedia)

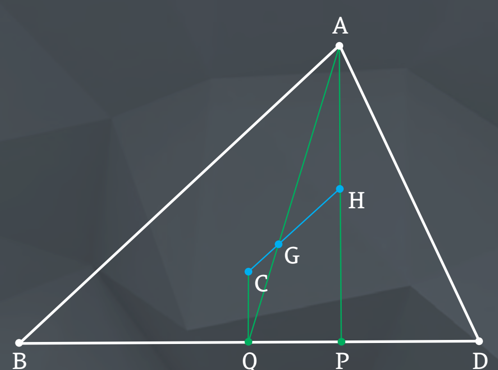


denir. Üçgenin ağırlık merkeziyle diklik merkezini birleştiren doğrunun orta noktası Euler dokuz nokta çemberinin merkezidir.

Yine bir mucize sonucu üçgenin kenarlarına orta noktalarından çizilen dikmeler de bir noktada kesişir. Bu nokta aynı zamanda üçgenin üç tepe noktasını içeren dış çemberin de merkezidir. Euler dokuz nokta çemberinin çapı işte bu dış çemberin yarıçapına eşittir.

Euler bir üçgendeki dış çemberin merkezi, ağırlık merkezi ve diklik merkezinin aynı doğru üzerinde olduğunu ve ağırlık merkeziyle diklik merkezi arasındaki mesafenin ağırlık merkeziyle dış çember merkezi arasındaki mesafenin iki katı olduğunu kanıtlamıştır. Ancak dokuz nokta çemberiyle ilgili bir çalışması olmamıştır. Yine de bu gerçek bizim bu çembere Euler dokuz nokta çemberi dememize engel olamamıştır. Ayrıca aynı çembere Feuerbach çemberi de deriz, hatta bazen Terquem çemberi dediğimiz de olur.

Olry Terquem ve Karl Wilhelm von Feuerbach'ın kim olduğu ve bu çemberin bulunuşuna neler kattığını araştırmayı size bırakıp çemberden elipse geçeceğim.



AP doğrusu BD kenarına indirilen dikme. H noktası kenarlara köşelerden indirilen dikmelerin kesişme noktası, yani diklik merkezi. AQ doğrusu BD kenarının ortayı. G noktası kenar ortayların kesişme noktası, yani üçgenin merkezi. QC doğrusu BD kenarına orta noktasından çizilen dikme ve C noktası da kenarların orta dikmelerinin kesişme noktası, yani dış çember merkezi. Euler C, G ve H noktalarının aynı doğru üzerinde olduğunu gösterdi. CGH doğrusuna üçgenin Euler doğrusu da denir.

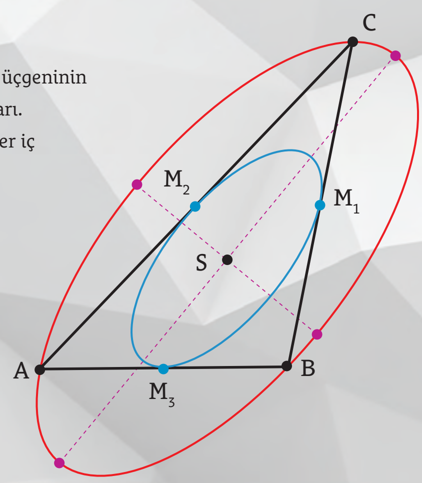
Steiner ve Elipsleri

Bir üçgenin kenarlarına içerden teğet olacak şekilde elipsler çizilebilir. Bunlar arasında alanı en büyük olanı ise kenarlara orta noktalarından teğet olanıdır. Bu en büyük elipsin merkezi üçgenin ağırlık merkezidir. İşte bu elipse Steiner iç elipsi denir. Bir de üçgenin köşelerinden geçen ve merkezi üçgenin merkeziyle aynı olan bir elips vardır ki ona da kısaca Steiner elipsi denir. Bu elipsler benzer elipslerdir ve büyüğünün alanı küçüğünün alanının dört katıdır.

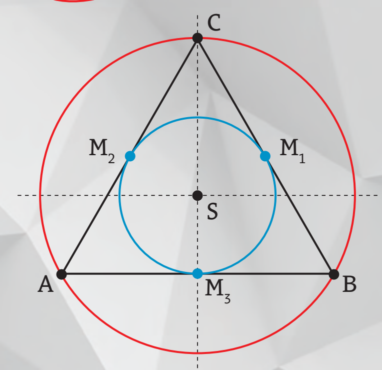
Steiner elipsi bir tarafa, biz Steiner iç elipsi ile ilgilenelim. Burada ilk akla gelen soru bu elipsin odak noktalarının nerede olduğudur. Bu sorunun cevabını Jörg Siebeck, İsviçreli matematikçi Jakob Steiner'in ölümünden bir yıl sonra, 1864'de bulmuş ve matematik dünyasının en prestijli dergilerinden birinde yayımlamıştır.

Biz onun cevabını bugün Marden teoremi olarak anıyoruz. Oysa Marden'in yaptığı, Siebeck'in makale-

M_1, M_2, M_3 noktaları ABC üçgeninin kenarlarının orta noktaları. Mavi elips üçgenin Steiner iç elipsi, kırmızı elips de üçgenin Steiner elipsi. Ortadaki siyah nokta ise hem üçgenin hem de elipslerin ortak merkezi. (Wikipedia)



ABC üçgeni eşkenar olduğu zaman Steiner elipsleri üçgenin iç teğet ve çevrel çemberlerine dönüşür. (Wikipedia)



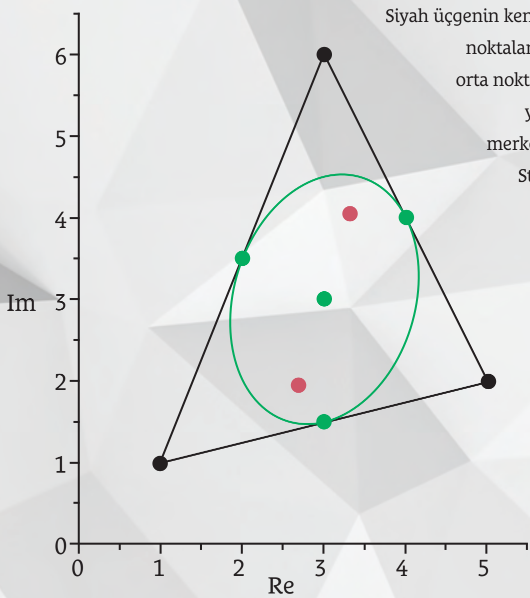
Jacob Steiner (1796-1863)

sinin yayımlanmasından yüz yıl sonra, yazdığı bir geometri kitabının daha ilk sayfalarında bu teoremin ayrıntılı bir ispatını vermek ve bu ispatın ilk kez Siebeck tarafından yapıldığını yazmaktan ibarettir. Marden aynı bağlamda bu teoremin değişik genellemelerini yapan tam on dört matematikçinin çalışmalarına da atıfta bulunmuştur. Marden'in bu kitabının adı Polinomların Geometrisi'dir.

"Üçgen, çember, elips derken polinomlar nereden çıktı?" diyeceksiniz.

"Matematik, değişik konulara ayrılmış adalardan oluşan bir takımada ülkesi değil, tüm konuları birbirine bağlı bir ana kıtadır". Öğrencilik yıllarımda yaşlı matematikçilerden duya duya gına getirdiğim ve küçümsediğim bir laftı bu. Şimdilerde ise genç matematikçilerin tüm küçümsemelerine karşın onlara gına getirecek kadar çok tekrarladığım bir söz oldu.

İşte o yüzden polinom nereden çıktı diye sormayın. Çıkmasa şaşardık.



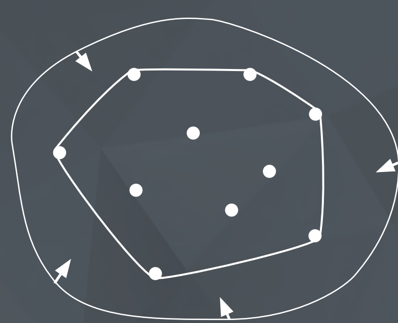
Siyah üçgenin kenarları üzerindeki yeşil noktalar üçgenin kenarlarının orta noktaları, üçgenin içindeki yeşil nokta ise üçgenin merkezi. Yeşil elips üçgenin Steiner iç elipsi. Kırmızı noktalar da bu elipsin odak noktaları. (Wikipedia)

Ve Elbette Gauss

Düzlemde bir miktar nokta alın. İsterseniz sonsuz tane de alabilirsiniz, biz bekleriz. Şimdi bu noktaların her birine bir çivi çakın ama çivileri tam çakmayın, başları biraz yukarıda kalsın. Sonra elinize bir lastik bant alıp bu çivilerin en dıştakilerinden geçirip bırakın. Bu lastik bant düzlemde bir bölgenin sınırlarını belirledi, değil mi? Bu bölgenin özelliği, içinde seçeceğiniz herhangi iki noktayı birleştiren bir doğru parçasının tümüyle bu bölgenin içinde kalmasıdır. Bu çeşit bölgelere dışbükey bölge denir. Yukarıda lastik bantla tanımladığınız bölge de seçtiğiniz noktaların hepsini içine alan en küçük dışbükey bölgedir. Bu bölgeye kısaca seçtiğiniz noktaların dışbükey kapanışı denir.

Bir polinomun kökleri de kompleks düzlemde birer noktaya karşılık gelir. Bu polinomun katsayılarını isterseniz kompleks sayılardan da seçebilirsiniz. Polinomun derecesi kaç ise o kadar kökü vardır. Bazen bir kök tekrarlanabilir ama zararı yok, kaç defa tekrarlarsa biz de o kökü o kadar sayarız. Sonuçta derece kadar kök vardır. Bu sonucun pek çok ispatı vardır ve elbette Gauss da buna ispat getiren ilk matematikçilerden biridir.

Gauss'un bir huyu da kendisine çok aşikâr gelen bazı sonuçları ispatlamadan kullanmasıdır. Fakat bazen bunları ispatlar, ispatları da çekmecesinde saklardı. Bir gün birisi çıkıp gelir ve Gauss'a kafa tutacak olursa çekmecesinden bu ispatı çıkarır gösterirdi. O yüzden koca Gauss'la pek dalaşılmazdı.



Düzlemdeki bazı noktaların etrafını lastik bir bantla çevreleyerek dışbükey kapanışı elde etmek. (Wikipedia)

Yine Gauss'un ispatlamadan kullandığı -ya da ispatladıysa bile kimse sormadığı için ispatını göstermediği- bir teorem de bir polinomun kökleriyle polinomun türevinin kökleri arasındaki ilişkidir.

Burada türev deyince analize geçmişiz de yalın geometriden uzaklaşmışız gibi bir his oluşmasın. Polinomun türevini hiçbir analitik anlam yüklemeden formel olarak da tanımlayabiliriz. Yani bunu entelektüel bir oyun olarak sunabiliriz. Kısacası x^n polinomunun türevi diye size nx^{n-1} polinomunu vereceğiz. Adının türev olmasından rahatsız olursanız siz başka bir isim de verebilirsiniz. Örneğin mürev diyebilirsiniz. O zaman Gauss'un kullandığı teorem, bir polinomla onun mürevinin köklerini kıyaslayan bir teorem olur.

Şimdi isterseniz biz de herkes gibi türev kelimesini kullanarak Gauss'un ne dediğine bakalım. Gauss diyor ki bir polinomun türevinin kökleri, polinomun köklerinden oluşan noktaların dışbükey kapanışının içindedir. Örneğin bir polinomun üç kökü varsa, türevinin kökleri bu üç noktanın oluşturduğu üçgenin içinde kalır. Polinom üçüncü derecedense türevinin iki kökü olacaktır. Bir elipsin de iki odak noktası vardır ama acele etmeyelim!

Carl Friedrich Gauss'un (1777-1855) doğum yeri olan Brunswick'teki heykeli

Felix Lucas

Gauss'un kullandığı ama ispatlamadığı sonuçları ispatlamaya çalışmak önüne geçilmez bir dürtüdür. Bağımlılığa varan bu dürtüden kurtulmanın tek çaresi hedeflenen ispata ulaşmaktır. Gauss'un ölümünden yirmi dört yıl sonra Felix Lucas, Gauss'un yukarıda sözünü ettiğimiz sonucunu ispatladı ve adını Gauss'unkinin yanına yazdırabilen şanslı ölümlüler arasına katıldı. Bugün bu sonuç literatürde Gauss-Lucas teoremi olarak geçer.

Bu arada, adını Gauss'unkinin yanına yazdırabildiği için Lucas mı şanslıdır, yoksa durduk yerde adını Lucas'ın ispatladığı teoreme yazdıran Gauss mu?

Para parayı çektiği gibi galiba şöhret de şöhreti çekiyor.

Michel Rolle

Michel Rolle (1652-1719)

Genellikle birdenbire gelen bir ilham bir matematikçiye hiç beklenmedik bir teoremi ispatlatmaz. Yapılan her iş daha önce yapılanların uzantısıdır. Pek çok matematikçi başarısını "devlerin omuzlarına basmış" olmasına yorar. Onlar kendilerinden önce gelenlerin çalışmalarını alıp ileri götürmüşlerdir.

Gauss-Lucas teoremi de birdenbire gelen bir ilhamın sonucu değil Rolle ustanın bir teoreminin genellemesidir. Gauss'tan yaklaşık yüz yıl önce yaşamış olan Michel Rolle, bir reel fonksiyonun iki kökü arasında mutlaka türevinin bir kökü olacağını göstermişti. Aslında Rolle bu sonucu sadece reel polinomlar için göstermiş, konunun türevlenebilir genel fonksiyonlara uyarlanmasından hiç memnun olmamıştı. Bu yüzden, biraz da Rolle ustanın isminin İngilizce dönmek (to roll) fiilini çağrıştırmasından esinlenerek, Rolle teoreminin genel fonksiyonlar için her kullanılışında Rolle'un mezarında döndüğü rivayet edilir.

Reel doğru üzerindeki iki noktanın oluşturduğu kümenin dışbükey kapanışının bu iki nokta arasındaki aralık olduğunu göz önünde bulundurursanız Gauss-Lucas teoreminin Rolle teoreminin nasıl doğal bir uzantısı olduğunu fark edersiniz. Asıl marifet bu “doğal uzantıyı” Gauss’tan önce görmek ya da Lucas’tan önce ispatlamakta yatıyor.

Yazı uzadı. Yavaş yavaş toparlayalım.

Dan Kalman (1952-)

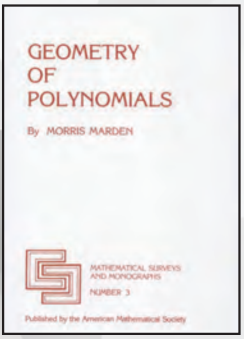
Dan Kalman

Yıllar önce İstanbul Üniversitesi Matematik bölümünün koridorlarındaki matematikçi portrelerinden çok etkilenmiştim. Karakalem çalışması olarak çizilen bu portreler adlarını kitaplarda gördüğüm tüm matematikçileri kapsıyordu neredeyse. O sıralar yeni mezun olmuştum ve TÜBİTAK’ın Gebze Temel Bilimler Enstitüsünde çalışıyordum. Eşim bu portrelerin fotoğraflarını çekti. Enstitü yöneticileri benim çocuksu hevesimi kırmayıp bu fotoğrafların tab edilmesi ve çerçevelenmesi için gereken parayı verdi. Ve tüm resimleri enstitünün koridorlarına gururla astım. Herkesin beni tebrik etmesini ve takdir etmesini bekliyordum. Yaşlı hocalar hoş görülü davrandılar elbette ama gençler bana enstitü koridorlarını ölü adamların resimleriyle doldurup enstitüyü mozoleye çevirdiğimi söylediler.

Oradan aldığım dersle bu yazıya bir de yaşayan bir matematikçi eklemek istedim. Bulduğum matematikçi ise benden iki yaş büyük. Ancak onu bulabildim.

Dan Kalman öğrencilik yıllarında Morris Marden’in polinom geometrisi üzerine yazdığı, yukarıda sözünü ettiğimiz kitabını okur. Koskoca kitaptaki onca muhteşem teorem arasından onu en çok etkileyen teorem, kitabın hemen başlarında verilen teorem 4.2 olur. Marden bu teoremin ilk kez yüz yıl önce Siebeck tarafından ispatlandığını ve yıllar içinde en az on dört matematikçinin daha bu teoremin değişik versiyonlarını ispatladığını da eklemiştir.

Morris Marden’in
Dan Kalman’ı etkileyen kitabı



Kalman o yıllarda Marden’in kitabındaki ispatı pek anlayamadığını ama teoreme hayran olduğunu anlatır. Teoremin ne olduğunu hâlâ size söylemediğim için siz şimdilik Kalman’ın o teoremin nesine hayran olduğunu bilmiyorsunuz.

Kalman o ilk okumadan yaklaşık otuz yıl sonra tekrar söz konusu teoreme döner. Bu kez Marden’in ve Siebeck’in ispatlarını tekrar okur ve anlar. Hatta o iki ispatta da hatalar bulur. Onların hatasını düzelterek düzgün bir ispat çıkarır ve bunu yayımlar. Bu makalesiyle ödül alır ve sırf teoremi Marden’in kitabından öğrendiği için bu teoreme Marden teoremi adını verir.

Artık zamanı geldi, teoremi anlatabiliriz.

Marden Teoremi

Üçüncü dereceden bir polinomun genelde üç ayrı kökü olur. Bu kökler düzlemde bir üçgen oluşturur. Bu üçgenin kenarlarına orta noktalarından teğet olan bir elips vardır. Hatırlarsanız bu elipse Steiner iç elipsi demiştik. Bu elipsin merkezi aynı zamanda üçgenin de merkeziydi.

Hatta hatırlarsanız bu elipsin odak noktaları neredедir diye de sormuştuk.

İspatını Kalman'ın düzelttiği Siebeck'in 1864 tarihli makalesindeki sonuca göre Steiner iç elipsinin odak noktaları yukarıda kullandığımız üçüncü derece polinomun türevinin kökleridir.

Bu muhteşem mucizeyi tekrar dillendirmekte yarar var. Üçüncü derece bir polinomun köklerinin oluşturduğu üçgenin kenarlarına orta noktalarından teğet olan bir elips vardır ve bu elipsin merkezi üçgenin merkezi, odak noktaları da polinomun türevinin kökleridir.

Bu sonucun baş döndüren cazibesinden kurtulup soğukkanlı düşünmeye başladığınızda bu sonucun Gauss-Lucas teoreminin bir uzantısı olduğunu göreceksiniz. Verilen üçüncü derece bir polinomun köklerinin dışbükey kapanışı bu köklerin oluşturduğu üçgendir ve Gauss-Lucas teoremine göre bu polinomun türevinin kökleri de bu üçgenin içinde kalacaktır.

Marden teoremi bir adım öteye gidip bu köklerin tam olarak nerede olduğunu söyler. Yani Marden, aslında Siebeck (ya da Kalman), Gauss ve Lucas gibi iki devin omuzlarına basabildiği için bu muhteşem sonucu bulmuştur.

Ustaların Ayak İzleri

Bu yazıda adını andığımız en yaşlı matematikçi üç yüz bir yıl önce öldü. En genci, benden bile yaşlı ama hâlâ hayatta. Bu matematikçileri tarih sırasına koyup birbirlerinden neler öğrendiklerini çıkarıp listelemeyi sizlere bırakıyorum.

Kalman da kendisine ödül kazandıran ve Marden Teoremi adını verdiği teoremi anlattığı makalesini durduk yere yazmamıştır. Matematikte adet olduğu üzere bir başka problemle zevk için uğraşırken aklına gelen fikirleri takip etmiştir.

Kalman'ın aklına Marden'in kitabındaki Siebeck'in teoreminin (Teorem 4.2) doğru ispatını ilham eden problem yine polinomlarla ilgilidir.

Bir polinomun köklerinin aritmetik ortalaması, polinomun türevinin köklerinin aritmetik ortalamasıyla aynıdır.

Bunu ispatlamak için biraz uğraşın, bakalım size ne ilhamlar gelecek.

Bol şanslar. ■

Kaynaklar

J. Siebeck, Ueber eine neue analytische Bekandlungsweise der Brennpunkte, *J. Reine Angew. Math*. 64 (1864), 175-182.

Morris Marden, *Geometry of Polynomials*, Math. Surveys no. 3, American Mathematical Society, Providence, 1966.

Dan Kalman, An Elementary Proof of Marden's Theorem, *American Mathematical Monthly*, 115 (2008), 330-338.

Dan Kalman Anasayfa: http://www.dankalman.net/AUhome/index.html

Marden teoreminin bir sayfalık ispatı: http://www.su.se/polopoly_fs/1.229312.1426783194!/menu/standard/file/marden.pdf