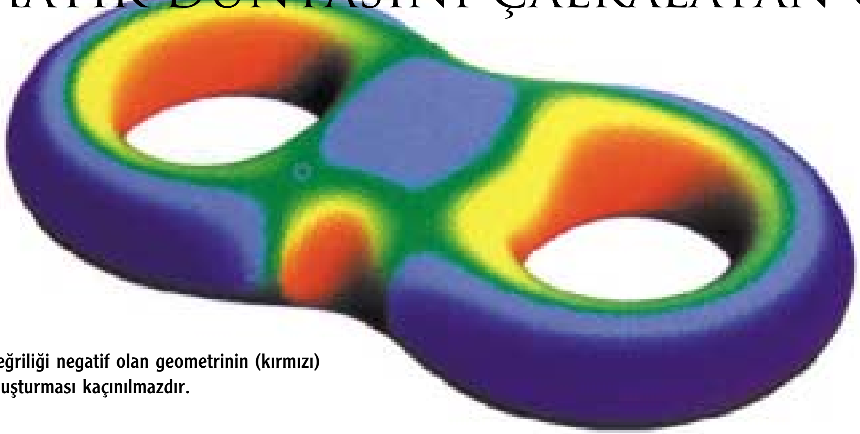
POINCARÉ VARSAYIMI, İSPAT YOLUNDA MI?

MATEMATİK DÜNYASINI ÇALKALAYAN GELİŞME



İki boyutlu yüzeylerde, eğriliği negatif olan geometrinin (kırmızı) delik oluşturması kaçınılmazdır.

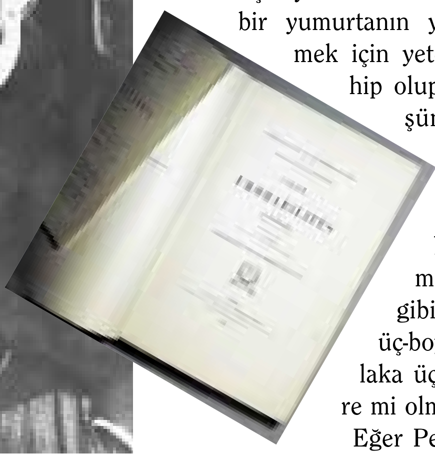
Matematiğin çözümlenmemiş en zorlu problemlerinden biri, belki bu sefer gerçekten de çözüm yolunda. Ama değilse bile, uzmanlara göre, çözümü sunan kişinin müthiş birşeyler başardığı kesin...

Poincaré Varsayımını İspatlamak = Sonsuz Şan Şeref. Matematikçiler, isimlerinin bu denklemde yer alması için 99 yıldır boşuna çabalayıp durmuşlar. Üç yıl önce, 2000 yılında, Cambridge, Massachusetts'deki Clay Matematik Enstitüsü'nün ispat için koyduğu bir milyon dolar ödül de, bu şan şeref pastasının kaymağı. Ancak şimdi, yıllardan beri ilk kez çok güvenilir bir aday, temkinle ve bölümler halinde, belki de zaferle sonuçlanabilecek bir çözüm açıklamakta.

Bundan birkaç hafta önce Rusya, St. Petersburg'daki Matematik Enstitüsü'nden Grigori Perelman, Cambridge'deki Massachusetts Teknoloji Enstitüsü'nde (MIT), heyecanla beklenen bir konferans dizisinde bu varsayım için verilebilecek bir ispatın ana hatlarını açıkladı. Geçmişteki başarısızlıklardan olacak, Perelman dahil hiç kimse zaferden söz etmedi; hatta Perelman bu makale için görüşmeyi bile kabul etmedi. Ancak uzmanların çoğu, bu çalışmanın çok özel olduğunu söylüyor. MIT'de topolog olan Tomasz Mrowka şöyle diyor: "Yaptıklarını var gücümüzle anlamaya çalışıyoruz. Birşeyler yaptığı da ortada. Makale ve yazılarını okuyup incelemek için bunca zaman harcadıktan sonra, elleriniz bomboş çıkmayacağınız kesin." San Diego'daki California Üniversitesi'nden, diferansiyel geometri konusunda uzman Bennet Chow ise "Önemli bir açıklama yaptığı belli, ancak varsayımı ispatlayıp ispatlamadığını söylemek için henüz erken" diyor.

Bu başardı-başaramadı oyununun başlangıcı, Perelman'ın 12 Kasım 2002'de İnternet'te verdiği gizemli bir yazı: "Poincaré varsayımının ispatının bir özetini veriyoruz." Okuyanların çoğu, Perelman'ın yalnızca olası bir ispat yönteminin ana hatlarını vereceğini düşünmüş, ancak Perelman durumu e-postayla açıklığa kavuşturmuştu: açıklayacağı, ispatın kendisiydi! 10 Mart'ta İnternet'te çalışmasını daha ayrıntılı anlatan ikinci bir makale yayımlayan Perelman, bir sonraki makaleyle de işi bitireceğini söylüyordu. İşte MIT'deki konferanslar, her üç bölümden de bilgi içeriyordu.

Henri Poincaré (1854-1912)



Aslında Perelman, Fransız matematikçinin ortaya attığı problemden daha büyük çaplı bir problemi hedeflemişti. Poincaré, günümüzde topoloji adı verilen matematik dalının temelini atarken, aynı zamanda topolojinin en basit üç-boyutlu nesnesini; dört boyutlu bir yumurtanın yüzeyini belirlemek için yeterli araçlara sahip olup olmadığını düşünüyordu. Yani hiçbir belirleyici niteliği –delik, Möbius benzeri bükülme, kulp, kenar gibi– olmayan bir üç-boyutlu uzay, mutlaka üç-boyutlu bir küre mi olmak zorundaydı? Eğer Perelman'ın ispatı doğruysa, çok daha genel bir tez de doğrulanmış olacak. Davis'teki California Üniversitesi'nden William Thurston'un bu tezi, 19. yüzyıl Alman matematikçisi Bernhard Riemann'ın dönüm noktası niteliğindeki bir teoreminden kaynaklanıyor. Riemann, herhangi bir iki-boyutlu uzayın, yani yüzeyin, bir tür 'masajlamayla', eğriliği her yerde aynı (pozitif, negatif, ya da dümdüz) olacak biçime dönüştürülebileceğini söylemişti. Bu şekilde "geometrikleştirilmiş" bir yüzeyin negatif eğriliği arttıkça, deliklerinin sayısı da artar. Öyleyse, delik içermeyen bir yüzeyin eğriliği pozitif olmak zorundadır ve bu nedenle de yüzey, topolojik olarak bir küreye denktir.

Thurston, bu "geometrikleştirme varsayımı" ile Riemann'ın teoremini üç-boyuta taşımayı amaçlıyordu. Üç-boyutlu uzaylar, iki-boyutlu uzaylardan çok daha karmaşık oldukları için, matematikçilerin onları Riemann yöntemiyle sabit bir eğrilik verecek biçime 'masajlamaları' olanaksız Ancak 1970'lerin sonuna doğru, o zamanlar Princeton Üniversitesi'nde olan Thurston, bundan geri kalmayacak birşey yapmayı önerdi. Herhangi bir üç-boyutlu uzay, doğru yerlerden kesilerek, hiperbolikten (eğriliği negatif) küresele (eğriliği pozitif) uzanan, son derece tek-biçim sekiz geometriden birine dönüştürülebilirdi.

Eğer bu geometrikleştirme varsayımı doğruysa, matematikçilere üç-boyutlu uzayları sınıflandırmak için bir tür "periyodik" tablo sağlanmış olabilirdi. Topolojik geometrilerin yedisi de kendilerini açığa vuran izler bırakacağı için, bu izleri taşımayan bir uzayın küresel olması gerekirdi. İspatlanması gereken de, bu varsayımdı. Ama nasıl?

1980'lerin başında, şimdi Columbia Üniversitesi'nde olan Richard Hamilton, ısının bir demir çubuktan 'aktığı' gibi, üç-boyutlu bir uzayın da kendini geometrikleştirmek için 'akmaya' yönlendirilebileceğini ortaya attı. 1988'de de, Riemann'ın iki boyutlu yüzeyler için verdiği teoremi, bu "Ricci akışları"nı kullanarak yeniden ispatladı.

Ne var ki Hamilton'un planı, üç-boyutta bir soruna yol açtı. Bir uzayın farklı bölgeleri, farklı geometrilerini büyütecek biçimde akacak ve aralarındaki sınırları, giderek incelen "boyunlar" oluşacak biçimde gereceklerdi.

Perelman, ABD'de verdiği bir konferans sırasında

Hamilton'ın Harvard Üniversitesi'ndeki meslektaşı Shing-Tung Yau, bu boyunların, matematikçilerin Thurston varsayımının gerektirdiği "ameliyatları" yapabilecekleri yerleri işaret ettiklerine dikkat çekti. Ancak boyunlar zamanından önce koparsa, ya da uygun olmayan şekiller –özellikle de sorun çıkaran "puro" şeklini– alırsa, ameliyat başarısız olurdu. Dahası, bu ameliyatları Hollywood yıldızlarının estetik ameliyatları gibi, sürekli yinelenmekten alıkoyacak birşey var mıydı? Yau ve Hamilton bu sorularla yıllarca boğuştu. Perelman onların geliştirdiği tekniklerin birçoğunu kullandı; ancak onlara çok önemli bir kavram ekledi: yüzey aktıkça artan bir tür "entropi"; Perelman'ın entropisi, Ricci akışlarına bir yön kavramı getirmekle, ileriye doğru hareket eden bir uzayın geometrikleşmesine yardım etmiş oluyordu. Bunun yanısıra, Perelman'a, çöken bölgelerin büyüklüğünü ve biçimini kontrol etme olanağını veriyorlardı.

Uzmanların hepsi olmasa da çoğu, Perelman'ın "puroları söndürüp" dar boyunları da ehlileştirdiğinden eminler. Ancak ameliyatların sayısını kontrol edebileceğinden o kadar emin değiller. Yau, bunun sonucunun da hüsran olabileceği, Poincaré varsayımını ispatlama girişimlerinin hepsinin, bu tür bir eksik adım yüzünden tepetaklak olduğu uyarısını yapıyor..

Perelman temel amacına (ve bir milyon dolarlık ödüle) ulaşamasa bile, Chow, onun çalışmalarının Ricci akışlarını anlamada çok büyük bir ilerleme sağladığını söylüyor: "Bu, dağa tırmanmak gibi birşey; tek fark, gerçek yaşamda dağın ne kadar yüksek olduğunu bilmemiz. Hamilton'un yaptığı, inanılmaz bir yüksekliğe, beklenebileceğin çok ötesine tırmanmaktı. Perelman, Hamilton'un bıraktığı yerden başlayıp daha da yukarılara çıktı; ne var ki, dağın yüksekliğine ilişkin bilgimiz hâlâ yok."

MacKenzie, D. "Mathematics World Abuzz Oven Possible Poincaré Proof" Science, 18 Nisan 2003

Çeviri: Nermin Arık

Asal Sayılar Konusunda Atılan Adım, Biraz Kısa mı?...

Geçen sayımızda, "İkiz Asallar" başlığı altında matematik-severlere müjdeli bir haber vermiştik. California'daki San Jose Üniversitesi'nden Dan Goldston ve Boğaziçi Üniversitesi'nden Yalçın Cem Yıldırım, geçtiğimiz Mart ayı sonunda ABD'de verdikleri bir konferansta, "Asal Sayılar Arasındaki Küçük Boşluklar" makalelerinin sunumunu yaparak, matematikçileri çok uzun süredir uğraştırmış bir probleme güçlü bir yanıt getirmişlerdi. Çalışmalarında asal sayıların (yalnızca kendilerine ve 1 sayısına bölünebilen tamsayılar) sayı doğrusu üzerinde tahmin edilenden daha sıkı kümeleşmeler oluşturduklarını ispatlamışlardı. Bu, aynı zamanda sayı teorisi alanında bilinen en eski ve ünlü varsayımlardan birinin ispatı yolunda atılmış, çok büyük bir adımdı. "İkiz Asallar Varsayımı" olarak anılan bu varsayım, 3 ve 5 ya da 1.000.000.007 ve 1.000.000.009 gibi, birbirinden yalnızca iki sayı farkla gelen ardışık (ikiz) asallardan sonsuz sayıda olduğu tezini ortaya atar. Ancak matematikçiler, varsayımın ispatının daha çok bekleyeceği görüşünde birleşmişlerdi.

Geçtiğimiz Nisan ayındaysa, sayı teorisyenleri Kannan Soundararajan (Michigan Üniversitesi) ve Andrew Granville (Montreal Üniversitesi), Goldston ve Yıldırım'ın tekniğini uygulayarak, aralarındaki fark 12 olan asal sayı çiftlerinden de sonsuz sayıda olduğunu gösterme girişiminde bulundular. Ancak aldıkları sonuçlar, ikiz asallar varsayımına öylesine yakındı ki, işin içinde bir bityeniği olduğundan kuşkulanarak Goldston ve Yıldırım'ın çalışmasını yeniden masaya yatırmaya karar verdiler.

Uykusuz birkaç gece... ve hata bulundu. İspattaki 'delik'se ne Goldston ne de Yıldırım tarafından henüz kapatılabilmiş değil. Matematikçiler, bu işin de epey zaman alabileceği görüşündeler. Ancak bu hata, tüm çalışmayı çöpe atmış değil. Goldston'sa hâlâ ümitli. Çalışma yinelenip de pürüz temizlenebilirse, ortada yine atılmış bir adım olacağına kesin gözüyle bakılıyor. Sorun, adımın büyüklüğünde gibi...

Zeynep Tozar

Kaynak: MacKenzie, D. Prime-Number Proof's Leap Falls Short, Science, 16 Mayıs 2003