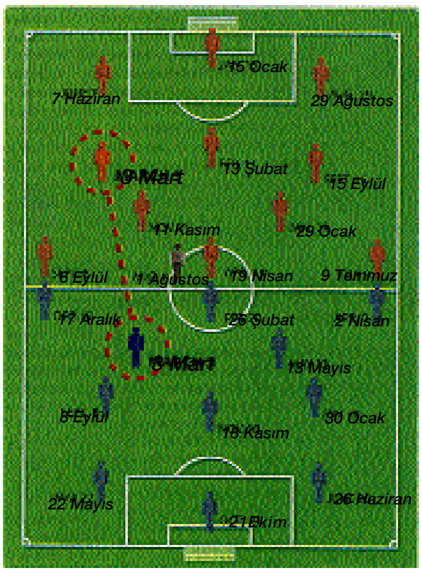
Bu Ne Rastlantı!

İngiliz matematikçisi ve gazetecisi Robert Matthews, Teaching Statistics (İstatistik Öğretimi) adlı derginin İlkbahar 1998 sayısında, Fiona Stone ile birlikte yazdığı bir makalede sık görülen bir rastlantıyı inceledi: Doğum günümüzün başkalarının doğum günüyle çakışması.

Doğum gününün aynı olmasından aynı ayda ve günde doğmayı kastediyoruz; aynı yılda doğmayı değil. Bir odada en az kaç kişi olmalıdır ki iki kişinin doğum gününün aynı olma olasılığı %50'nin üstünde olsun. İşi basitleştirmek için 29 Şubat'ı dikkate almayalım. Bu durumda 365 farklı doğum günü vardır. Ayrıca her doğum gününü olasılığının da aynı olduğunu varsayalım; aslında bu tam doğru değildir. Çünkü yılın bazı zamanlarında daha fazla doğum olur. Bunu da dikkate almayalım; çünkü bu öğeler, analizi çok daha karmaşık duruma getirir ve bunları dikkate almamakla da sonuçta fazla bir değişme olmaz.

Peki, odada kaç kişi olmalı? İki yüz mü? Araştırmacılar bu soruları Üniversite öğrencilerine sorduklarında, tahminlerin ortalaması 385 çıkıyor. Belli ki bu popüler tahmin çok yüksektir; çünkü odada 366 (29 Şubat dahil edilirse 367) kişinin bulunmasıyla iki kişinin aynı günde doğmuş olması garantilenir. Aslında doğru yanıt çok daha küçüktür: Yalnızca 23 kişi.

Bu gibi hasaplarda bir olayın gerçekleşmemesi olasılığını bulmak daha kolaydır. Bir olayın "gerçekleşmesi" olasılığını bulmak için, gerçekleşmemesi olasılığı 1'den çıkartılır. Örneğin "en az iki kişinin aynı günde doğmamış olma" olasılığı nedir? Bir başka deyişle, herkesin doğum gününün farklı olma olasılığı nedir? Odada 1 kişiyle işe başlayalım ve sonra her keresinde odaya 1 kişi daha sokalım. Gruba en son eklediğimiz kişinin doğum gününün öncekilerden farklı olma olasılığını hesaplayabiliriz. Odaya her giren kişiyle, doğum günlerinin farklı olma olasılığı sürekli azalır ve aynı olma olasılığı da sürekli artar. En az iki kişinin doğum günlerinin çakışması olasılığı sürekli artar. En az iki kişinin doğum günlerinin çakışma olasılığının %50'den fazla olması, bu olasılığın 1/2'den fazla olması demektir. İki kişinin aynı günde doğmamış olmaları olasılığı 1/2'nin altına düşünce, aynı günde doğmuş olmaları olasılığı 1/2 nin üstüne yükselir.



Bir futbol maçında yer alan 23 kişiden (22 oyuncu+hakem) en az ikisinin doğum günlerinin aynı olma olasılığı % 50'nin üstündedir.

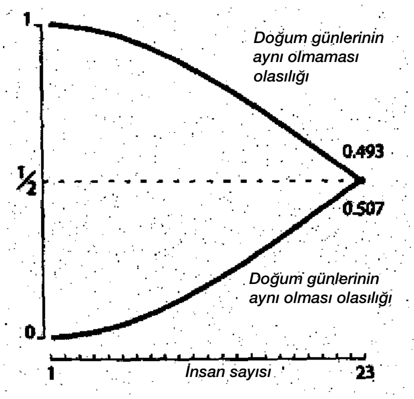
Odada tek kişi varsa (ona Alfred diyelim) doğum günlerinin çakışmaolasılığı yoktur; bu durumda doğum günlerinin çakışmama olasılığı 1'dir. Şimdi odaya Betty girmiştir. 365 doğum günü olasıydı; fakat Alfred bunlardan birini kullanmıştır. Betty için 364 birbirinden farklı doğum günü kalmıştır. O halde Alfred ile Betty'nin farklı günlerde doğmaları olasılığı 364/365'tir. Odaya Carla girer. Şimdi kullanılmamış 363 doğum günü kalmıştır; Carla'nın Alferd ile Betty'den farklı bir günde doğmuş olma olasılığı 363/365'tir. Bu üç kişinin doğum günlerinin farklı olma olasılığı (364/365) x (363/365)'tir.

Bir model oluşuyor gibi. Diogenes odaya girince, doğum günlerinin farklı olma olasılığı (364/365) x (363/365) x (362/365)'tir. Genel olarak n kişi odaya girdikten sonra n doğum gününün farklı olma olasılığı (364/365) (363/365)x...x(365-n+1)/365'tir. Yapacağımız şey bu ifadede n'nin hangi değeri için bu çarpımın 1/2'nin altına düşeceğini bulmaktır. Şekil 2'deki grafik bu sonucu gösterir. Odada 22 kişi varken hepsinin doğum günlerinin farklı olma olasılığı 0.524, 23 kişi varken 0.493'tür. O halde odada 23 kişi varken en az kişinin aynı doğum gününü paylaşması olasılığı 1- 0.493= 0.507'dir; yani 1/2'den ya da %50'den fazladır.

Artık en az 23 kişi içeren bir toplulukta en az kişinin aynı günde doğmuş olduğuna dair bir iddiaya girebilirsiniz. Uzun sürede sizin haklı çıkacağınız kesindir. Odadakilerin sayısı ne kadar fazlaysa iddiayı kazanma olasılığınız o kadar büyüktür. Bu problemi çok kişinin yanlış çözme nedeni şudur: 23 kişinin az olduğunu düşünürler. Yılda 365 gün var; nasıl olur da 23 kişiden ikisinin doğum gününün aynı olma olasılığı %50'den fazla olabilir diye düşünürler. Evet, 23 sayısı küçük görünürse de 23 kişiden 253 farklı çift oluşturulabilir. (Odada n kişi varsa, bu n kişiden nx(n-1)/2 çift oluşturulabilir.) Doğum gününün aynı olması en az iki kişi arasında olacağından 253 sayısı 23'ten çok daha önemlidir.

Matthews ve Stones bu sonuca farklı bir yoldan vardılar. Bir futbol maçında sahada 23 kişi vardır: her biri 11 oyuncudan ibaret iki takım ve bir de hakem. O halde böyle bir grupta iki kişinin doğum gününün aynı olma olasılığı % 50'den fazladır. Bu yazarlar İngiltere'de 19 Nisan 1997'de oynanan futbol maçlarında bu 23 kişilik grupların doğum günlerini araştırdılar. 10 oyundan 6'sında en az iki kişinin doğum günleri aynı, 4'ünde farklıydı.

Maçların ikisinde 2 çiftin doğum günleri çakışıyordu: Liverpool-Manchester United maçında iki oyuncu 21 Ocak'ta ve iki oyuncu da 1 Ağustos'ta doğmuştu. Chelsea-Leicester City maçında iki oyuncu 1 Kasım'da ve iki oyuncu da 22 Aralık'ta doğmuştu. Olasılık kuramına göre 23 kişiden iki çiftin aynı doğum gününe sahip olmaları olasılığı 0.111'dir; bu nedenle her 9 maçtan birinde bu durum meydana gelecektir. Aynı günde doğmuş üç çiftin bulunma olasılığı 0.018'dir ve 23 kişiden üçünün aynı günde doğmuş olmaları olasılığı 0.007'dir; bu nedenle her 143 maçtan birinde meydana gelir.



Doğum günlerinin aynı olması olasılığı, insan sayısı 23'e çıkınca, % 50'yi aşar.

Şimdi biraz farklı bir soru: Sizinle birlikte odada kaç kişi olmalıdır ki bunlardan birinin sizinle aynı doğum gününü paylaşma olasılığı %50'den fazla olsun? Şöyle bir tahminde bulunmuş olabilirsiniz: (364/2)+1=183. Herhalde şöyle düşünmüşsünüzdür: Sizinkinden farklı 364 doğum günü vardır ve 364'ün yarısından bir fazla kişi, yani 183 kişi, odadaysa, bunlardan birinin doğum gününün sizinkinin aynısı olma olasılığı %50'den fazladır. Fakat doğru yanıt 253'tür.

Daha önce kullandığımız yöntemi kullanın: ötekilerin doğum günlerinin sizinkinin aynısı olmama olasılığını bulup bunu 1'den çıkarın. Diyelim ki odada bir tek siz varsınız ve sırasıyla birer birer Alfred, Betty, Carla, Diogenes vb. geliyor. Alfred'in doğum gününün sizinkinden farklı olma olasılığı 364/365. Betty'nin doğum gününün sizinkinden farklı olma olasılığı 364/365. Carla, Diogenes vb için aynı mantık. Burada artık sizin dışınızdaki insanların, örneğin Alfred ile Carla'nın aynı günde doğup doğmadığıyla ilgilenmiyoruz. Her gelenin sizinle aynı günde doğup doğmadığıyla ilgileniyoruz. Bu nedenle odaya n kişi girdikten sonra, hepsinin sizinkinden farklı bir doğum gününe sahip olmaları olasılığı $(364/365)^n$ dir. Bu değerin 1/2'den az olması için n'in alması gereken ilk değer n=253'tür;

çünkü $(364/365)^{253}$=0.499'dur.

Şunu da belirtelim ki, ikinci problemde yanıtın 253 kişi olmasıyla, birinci problemde 23 insandan 253 çift oluşturulmasında aynı sayıların (253'ün) çıkması tümüyle rastlantıdır; matematik bakımından bir önemi yoktur.

Bu hesaplar bize ne öğretir? Bazan bize ilk bakışta olanaksızmış gibi gözüken şeyler (burada 23 kişiden ikisinin aynı günde doğmuş olmaları olasılığının % 50'den fazla oluşu) o kadar da olanaksız olmayabilir. Bir futbol maçı sırasında doğum günlerinin aynı olduğu anlaşılan iki kişi, bu rastlantıyı herhalde şaşkınlıkla karşılayacaklar ve bu anıyı ömür boyu unutmayacaklardır. Fakat bu 23 kişiden oluşturulabilecek 252 diğer çift, doğum günlerinin çakışmamasına hiç şaşmayacaklardır. Çünkü biz beklenmedik rastlantıları anımsarız; beklenmedik rastlantı sayılmayan şeyleriyse dikkate almayız. Böylece beklenmedik rastlantılara olduğundan fazla önem veririz.

Diyelim ki siz ve eşiniz ıssız bir plajdasınız; karşıdan iki kişi geliyor. Gelenleri merakla izliyorsunuz. Bir bakıyorsunuz ki gelen müdürünüzle yeni eşi; meğer balayına çıkmışlar. Bu beklenmedik rastlantıyı herhalde hiç unutmazdınız; ama aynı karşılaşma iş yerinizde olsaydı bunu unutur giderdiniz. İşte beklenmedik rastlantıların önemi.

Scientific American, Haziran 1998
Çeviri: Selçuk Alsan