Pólya'nın Keşif Ustalığı

"Aklım, gerçekleşen dileğinin şimşeğiyle aydınlanıverdi."

Dante, Paradiso Canto XXXIII
G.Pólya tarafından zikredilmiştir.

George Pólya'nın (1888-1985) bilimsel kariyeri yetmiş yıldan fazla sürdü. Parlak bir matematikçi olarak bilime birçok alanda köklü katkılarda bulunan Pólya, aynı zamanda mükemmel bir öğretmen, öğretmenlerin öğretmeni ve zor konuları kolaylaştırma ustasıydı. Pólya keşif yapmanın bir ustalık ve hüner işi olduğuna inanırdı. Ona göre, öğrencilere keşif kurallarını öğreten ve uygulatan ustalıklı bir eğitim icat ve keşif yeteneğini artırabilirdi.

Pólya, ilki 1945'te yayınlanan zengin içerikli, olağanüstü bir kitap serisinde, kendi geniş deneyimlerine dayanarak bu icat ve keşif ilkelerini açıkladı; icat ve keşiflerin kural ve örneklerini bizlerle paylaştı. Bu kitaplar birer strateji, teknik bilgi, pratik iş görme, yol gösterme, anekdot ve matematik tarihi definesi olup birbirinden ilginç, her düzeyde birçok matematik problemi içermektedir. Polya, "Nasıl Çözmeli" adlı kitabının kapak sayfalarında, problem çözmek için genel bir plan vermektedir:

Nasıl Çözmeli

Birinci kural: Önce problemi anlamalısınız.
İkinci kural: Elinizdeki verilerle bilinmeyen arasında bir ilişki arayın. Eğer doğrudan doğruya bir ilişki yoksa, yardımcı problemler bulmaya mecbur kalabilirsiniz. Eninde sonunda bir çözüm planı elde etmeniz gerekir.
Üçüncü kural: Planınızı uygulayınız.
Dördüncü kural: Elde edilen çözümü gözden geçirin.

Bu ilkeler daha sonra "moleküler" düzeye inecek şekilde parçalara bölünür. Burada uygun bir zamanda hayata geçirilecek stratejiler sıralanır: Eğer problemi çözemezseniz, ona benzeyen bir diğer problem arayın; ileriye doğru çalışın; geriye doğru çalışın; koşulu daraltın; koşulu genişletin; bir karşıt-örnek arayın; tahminde bulunun ve tahmininizi deneyin; bölün ve kazanın; kavrama tarzınızı değiştirin.

Keşfe götüren bu kuralların herbiri, birçok örnekle desteklenmiştir.

Daha sonraki araştırmacılar Pólya'nın düşüncelerini çeşitli şekillerde geliştirdiler. A. H. Schoenfeld, kolej düzeyindeki matematikte en sık kullanılan çözüm kurallarının ilginç bir listesini hazırladı. Burada bu tabloyu veriyoruz:

Sık Kullanılan Çözüm Yöntemleri

Analiz

1) Mümkünse bir diagram çizin.
2) Özel durumları inceleyin.
a) Problemi örneklendirmek için özel değerler seçin ve çözümü "sezmeye" çalışın;
b) Olanakların sınırlarını belirlemek üzere limit durumları inceleyin;
c) Sırasıyla 1, 2, 3...'e eşit tamsayı parametreleri kullanarak bir tümevarım oluşturmaya çalışın.
3) Problemi basitleştirmeyi deneyin.
Bunun için:
a) Simetriyi araştırın veya
b) "Genelliği kaybetmeme" tartışmaları üzerinde durun (oranlama dahil)

İnceleme

1) Özünde eşdeğer problemleri düşünün:
a) Koşulların yerine eşdeğer koşullar koyun;
b) Problemin öğelerini farklı şekillerde bir araya getirin;
c) Yardımcı öğeleri işleme koyun;
d) Problemi yeniden formüle edin:
i- Süreci veya işaretlemeyi değiştirin;
ii- Çelişki veya karşıt tez aracılığıyla tartışmaya girin
iii- Bir çözüm bulduğunuzu varsayarak ve bunun özelliklerini inceleyin .
2) Biraz değiştirilmiş problemleri düşünün:
a) İkincil hedefler seçin (koşulların kısmen gerçekleşmesini sağlayın);
b) Bir koşuldan kısmen vazgeçin ve sonra onu tekrar işleme koymaya çalışın;
c) Problemi parçalara ayırın ve sonra teker teker bu parçalar üstünde çalışın.
3) Büyük ölçüde değiştirilmiş problemleri düşünün:
a) Daha az sayıda değişkenlerle benzer bir problem oluşturun;
b) Biri hariç bütün değişkenleri sabit tutun ve bu tek değişkenin probleme etkisini inceleyin.
c) i- Benzer biçim,
ii- Benzer "bilinenler",
iii- Benzer sonuçlar içeren diğer problemleri dikkate alın.

Unutmayın ki elinizdekine benzer daha kolay problemler üzerinde çalıştıktan sonra, hem elde ettiğiniz sonucu, hem de çözme yönteminizi size verilmiş probleme uygulamalısınız.

Çözümün Doğrulanması

1) Çözümünüz şu spesifik testlerden geçebiliyor mu?
a) İlgili bütün verileri kullandınız mı?
b) Çözümünüz akla yakın tahminlere uyuyor mu?
c) Çözümünüz simetri, boyut analizi veya oranlama testlerinden geçti mi?
2) Çözümünüz şu genel testlerden geçebiliyor mu?
a) Farklı bir yolla elde edilebilir mi?
b) Özel durumlarda da doğrulanabiliyor mu?
c) Bilinen sonuçlara indirgenebilir mi?
d) Bildiğiniz bir şeyi oluşturmak için kullanılabilir mi?

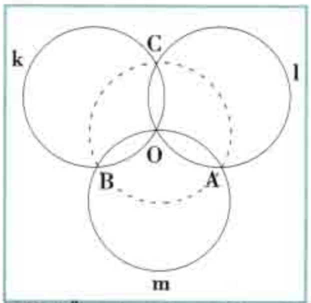
Pólya'nın düşünme ve yazmasındaki tadı size hissettirebilmek için, onun Matematiksel Buluş (cilt II, sayfa 54) kitabında anlattığı, kavram biçiminin değişmesiyle ilgili çok güzel, fakat anlaşılması zor bir parçayı aşağıda vereceğiz.

Örnek:

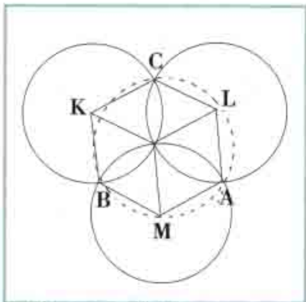
Okuyucuyla beraber küçük bir deney yapmaya çalışacağız. Önce basit, fakat pek sık rastlanmayan bir geometri teoremi verip onun kanıtlanmasını sağlayan düşünceleri sırayla vermeye çalışacağım. Çok yavaş ilerleyecek, gerçekleri peşpeşe sıralayacak ve her gerçeği yavaş yavaş açacağım. Sanıyorum ki okuyucu öyküyü bitirmemden önce ana düşünceyi yakalamış olacaktır (tabii özel engelleyici bir durum yoksa). Fakat ana düşünce beklenmedik tiptendir; bu şekilde okuyucu küçük bir buluş yapmanın zevkini yaşayabilir.

A. *Eğer yarıçapları aynı üç çember bir noktada kesişiyorsa, bu çemberlerin kesiştiği diğer üç noktadan geçen çemberin yarıçapı da bu üç çemberin yarıçapı kadardır.*

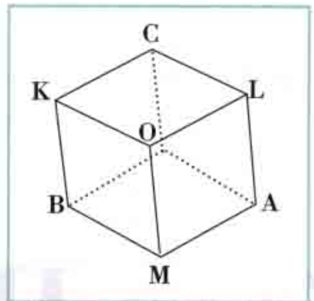
İspatlayacağımız teorem budur. İfade kısa ve açık, fakat yeteri kadar ayrıntı vermemiş. Eğer bir şekil çizer (Şekil 1) ve uy-



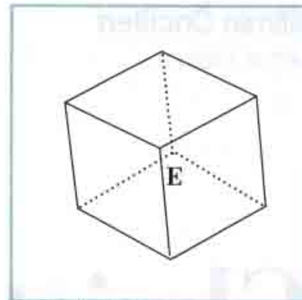
Şekil 1: Üç çemberin bir noktadan geçişi



Şekil 2: Fazla kalabalık



Şekil 3: Size neyi hatırlatıyor?



Şekil 4: İşte bu!

gun harfleri yazarsak, teoremi daha anlaşılır şekilde şöyle ifade edebiliriz:

B. *k, l ve m gibi üç çember, aynı r yarıçapına sahip olup aynı O noktasından geçmektedir. Ayrıca l ve m, A noktasında; m ve k, B noktasında; k ve l de c noktasında kesişmektedir. Bu durumda A, B ve C'den geçen e dairesinin yarıçapı da r'dir.*

Şekil 1; k, l, m ve e çemberlerini ve bunların A, B, C ve O kesişme noktalarını gösteriyor. Fakat bu şekil bizi memnun etmiyor; bir kere basit değil; sonra hâlâ tamamlanmamış; bir şey eksik gibi duruyor; öyle görünüyor ki çok gerekli bir şeyi dikkate almamışız. Çemberlerle uğraşıyoruz. Nedir bir çember? Bir çemberi merkezi ve yarıçapı belirler. Bir çemberin üzerindeki noktaların hepsi, çemberin merkezi denen bir noktadan eşit uzaklıktadır ve bu uzaklık çemberin yarıçapının uzunluğuna eşittir. Biz ortak yarıçap r'yi belirtmedik ve böylece hipotezin çok gerekli bir bölümünü dikkate almamış olduk. O halde merkezleri yerine koyalım: k için K; l için L ve m için M. r yarıçapını nerede göstermeliydik? Yarıçapı çizmek için k, l ve m çemberlerinden veya A, B ve C kesişme noktalarından herhangi birini diğerlerine tercih etmek için bir nedenimiz yok. Üç merkezden herbirini, ait olduğu çemberin bütün kesişme noktalarıyla birleştirmemiz gerekiyor: K merkezini B, C ve O kesişme noktalarıyla birleştiriyoruz vb.

Oluşan şekil (Şekil 2) şaşırtıcı derecede karmaşık. Düz ve çembersel o kadar çok çizgi var ki şekli doğru dürüst "görmekte" büyük zorluk çekiyoruz; şekil "hareketsiz durmuyor". Eski dergilerin bazı çizimlerine benziyor. Bu dergilerdeki çizimler kasıtlı olarak belirsiz yapılırdı; ona alışıldığı şekilde bakarsanız belli bir şekil görünür; fakat başka bir pozisyona gelene kadar çevirip bakarsanız aniden gözlerinizin önünde bir başka şekil belirir ve ilk şekille ilgili az çok nükteli bir yorum içerirdi. Bizim çemberler ve doğrularla yüklü bilmece gibi şeklimizde ikinci bir şekli tanıyabildiniz mi?

Kalabalık resmimizde saklı şekli birdenbire veya yavaş yavaş tanıyabiliriz. Onu problemi çözme çabalarımız sırasında veya ikincil, önemli olmayan koşullarda tanıyabiliriz. Örneğin memnun kalmadığımız bu şekli yeniden çizme sırasında, bütün şeklin doğru parçaları tarafından belirlendiğini gözlemleyebiliriz (Şekil 3).

Bu gözlem önemli gözükmektedir. Kuşkusuz ki bu sayede geometrik resim basitleşmiş ve muhtemelen mantıki durum da biraz daha açıklığa kavuşmuştur. Artık teoremimizi aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

C. *Eğer:*

KO,	*KC,*	*KB,*
LC,	*LO,*	*LA,*
MB,	*MA,*	*MO,*

gibi dokuz doğru parçasının herbiri r'ye eşitse, öyle bir E noktası vardır ki EA, EB, EC doğru parçaları (segmentleri) da r'ye eşittir.

Bu ifade dikkatlerimizi şekil 3'e çevirir. Bu güzel bir şekildir; bize tanıdığımız birşeyi hatırlatmaktadır. (Neyi?)

Tabii ki şekil 3'deki dörtgenlerin, hipotez gereği dört eşit kenarları olduğundan, örneğin OLAM, bir eşkenar dörtgendir. Eşkenar dörtgen bildiğimiz birşeydir; onu tanıdığımız için, şekli daha iyi görebiliriz. (Şeklin *bütünü* bize neyi hatırlatmaktadır?)

Eşkenar dörtgenlerin karşılıklı kenarları paraleldir. Bunun üstünde durursak şekil 3'ün dokuz doğru parçasının, herbiri üçerlik üç grup oluşturduğunu görürüz. Her gruptaki üç doğru parçası, örneğin AL, MO ve BK birbirine paraleldir. (Şekil bize *şimdi* neyi hatırlatıyor?)

Erişmemiz istenen sonucu unutmamalıyız. Bu sonucun doğru olduğunu varsayalım. Şekle e çemberini veya onun merkezi olan E'yi ve A, B ve C'de sona eren üç yarıçapı eklersek, başka eşkenar dörtgenler, başka paralel segmentler elde etmeye devam ederiz (Bk. Şekil 4). (Şeklin bütünü bize *şimdi* neyi hatırlatıyor?)

Tabii ki şekil 4, bir dikdörtgenler prizmasının 12 kenarının izdüşümüdür. Bu izdüşümün özelliği, bütün kenarların izdüşümünün eşit uzunlukta oluşudur.

Şekil 3 "saydam olmayan" bir dikdörtgenler prizmasının izdüşümüdür; yalnızca 3 yüz, 7 köşe ve 9 kenar görmekteyiz; bu şekilde 3 yüz, 1 köşe ve 3 kenar görülmemektedir. Şekil 3, şekil 4'ün bir bölümüdür; fakat bu bölüm bütün şekli belirlemektedir. Dikdörtgenler prizması ve izdüşümün yönü, şekil 3 deki 9 kenarın izdüşümlerinin hepsi r'ye eşit olacak şekilde seçilirse (hipotez gereği böyle olmaları gerekmektedir), kalan 3 kenarın izdüşümleri de r'ye eşit olur. r uzunluğundaki bu üç doğru, sekizinci (görülmeyen) köşenin izdüşümünden doğmuştur ve bu E izdüşümü, A, B ve C noktalarından geçen ve yarıçapı r olan çemberin merkezidir.

Teoremimiz ispatlanmıştır; düzlemsel bir şeklin, şaşırtıcı ve artistik bir tarzda, üç boyutlu bir cismin izdüşümü olarak kabul edilmesiyle ispatlanmıştır.(İspatta üç boyutlu geometri bilgileri kullanılmıştır. Umarım bu büyük bir hata değildir; öyle olsa bile kolayca düzeltilebilir. Artık E merkezinin yerini o kadar basitçe belirleyebiliriz ki EA, EB ve EC uzunlukları, üç boyutlu geometriden hiçbir yardım almadan dahi incelenebilir. Fakat burada bunun üzerinde durmayacağız.)

Bunların hepsi çok güzel; fakat insan yine de kararsızlığa düşüyor: Bu, "sabah gibi fışkıran, ışık mıdır?" İçinde dileklerin yerine getirildiği o ışık? Yoksa sadece bir Pazartesi sabahı bilgeliği midir? Bu düşünceler sınıfta sonuç verir mi? Pólya'nın programını pratik pedagojiye indirgeme çabalarını yorumlamak zordur. Öyle görünüyor ki öğretme denen şey, bir ustanın güzel düşüncelerinden daha fazlasını gerektirmektedir.

Çeviri: Selçuk Alsan

(Davis, P.J.- Hersh, R. Mathematical Experience. 1983)