



Beyne Gıda

Biz çocukluğumuzda herhalde pek zeki değildik. Örneğin yedi yaşımızdayken birbirimize "Söyle bakalım, birinci ve ikinci bildiği halde, sonrakilerin bilmediği nedir?" gibi sorular sormazdık. O nedenle de, şimdilerde, böyle bir sorunun yanıtı ne olabilir hiçbir fikrimiz yok. Aslında belki çoğul konuşmamalıyım. Ben kendi halimi yaygınlaştırarak, kendi çaresizliğimi ortaklar bularak aşmak istiyorum herhalde. Sorunun yanıtı "Bir yere, bir toplantı mekânına ilk kimin geldiği" imiş.

Bu ay, dergi elinize geçtiğinde ara tatilde olacaksınız herhalde. Belki beyniniz gıdasız kalır diye, birlikte bir mantık sorusunu çözelim istedim.

Soru şöyle:

Aklımdan birden büyük, birbirinden farklı iki tam sayı tutacağım, x ve y. Toplamları 100'den az olacak; $x+y < 100$

Birinize sayıların toplamını ($x+y$), diğerinize çarpımını söyleyeceğim (xy).

Bana sayıları söyleyebilecek misiniz?

İkisi de kaleme sarıldı. Bir zaman sonra:

Çarpımları bilen (Ç): Ben bu sayıları bilemedim!

Toplamları bilen (T): Ben senin bilemeyeceğini zaten biliyordum. Ben de bilemedim.

Ç: Hah, şimdi buldum.

T: Ben de buldum!

Bu bilgiler ışığında sayıları bulabilir misiniz?

Cevap parlak zekâ ürünü filan değil. Biraz uğraştırıcı ama nasıl uğraşacağınızı bilmek, yolu tayin etmek mantık işi. Sayıları teker teker denemek bir yol haliyle. Hele şimdi, küçük bir program yazarak deneye deneye sonuca varmak olanaklı. Ama aradığımız bu değil. Çözümü akılla bulmalı.

Ç "Ben bu sayıları bilemedim" dediğinde, bize ne bilgiler vermiş oluyor bir bakalım:

Öncelikle, iki sayının çarpımını, asal çarpanlarına ayırıp bakmış olmasını beklerdik kendisinden. Eğer sayı iki asal sayının çarpımı olsaydı, sayıları hemen bulmasını beklerdik. O halde, iki asal sayının çarpımı olan bütün sayıları elememiz lazım çarpım listesinden. Ek olarak, iki sayı birbirinden farklı olduğuna göre karelerin de elenmiş olması gerekir.

Demek ki sayıların ikisi birden asal sayı olamaz.

T "Ben senin bilemeyeceğini zaten biliyordum" dediğine göre, acaba nereden biliyordu? Elinde sadece iki sayının toplamı bilgisi var.

T, x ve y asal sayılar olsaydı, Ç'nin sayıları bulabileceğini çıkarmış olmalıdır. Ama o zaten, Ç'nin elinde iki asal sayının olamayacağını biliyor. Nasıl acaba?

Burada **Goldbach Kestirimine** başvuruyoruz: "Her çift sayı iki asal sayının toplamı olarak yazılabilir". Eğer toplam tek ise, emin olursunuz ki sayıların ikisi birden asal olamaz. T'ye "Ben zaten biliyordum" dedirten budur.

Demek ki sayılardan birisi çift, birisi tek olmalı. Yoksa toplam tek olamaz.

Buradan hemen çarpımın çift olması gerektiğini de çıkarabiliriz. Biliyoruz ki, bir çift sayı ile bir tek sayının çarpımı daima çifttir.

Özetlersek: Birisi çift, birisi tek iki sayı ile karşı karşıyayız.

Çarpımlardan bütün tek sayıları eleyebiliriz. Bütün kareleri eleyebiliriz. Bütün küpleri eleyebiliriz.

Toplamlardan bütün çiftleri de elememiz lazım. Bu son nokta önemli, çünkü çözüm kümemizi oldukça daraltıyor.

Biraz daha kafa patlatalım bakalım: T, "Ben zaten biliyordum." dediği anda, Ç, T'nin elinde tek sayının olduğundan emin oluyor. Ama acaba başka çıkarsamalar da yapabilir mi? Örneğin $x+y=39$ olabilir mi? $26+13=39$ diye söylüyorum. Eğer $x+y=39$ olsaydı, $xy=2.13.13$ olurdu ki Ç bunu hemen yakalar ve sayıları bulmuş olurdu. Benzer şekilde, demek ki bir asal sayının katları olan toplamlar da listeden çıkarılmalıdır. 51 örneğin; $34+17$ şekliyle bakıldığında, Ç'nin elinden kurtulmuş olmaması gerekirdi.

Eleme işini yaptığımızda (bu biraz can sıkıcı olabilir) çözüm kümesinde olabilecek $x+y$ toplamları listesinin şu listeye indiğini buluruz:

Aday Toplam Kümesi:

11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47

Bundan sonrası da biraz "hamallık" diye adlandırdığımız türden. Yukarıdaki 9 sayının toplamaya göre bileşenlerini bulmalı, içlerinden uygunsuzlarını elemeliyiz. Örneğin 11 sayısının $2+9$, $3+8$, $4+7$ ve $5+6$ sayılarından oluşabileceğini görüyoruz. Bunların içinden $5+6$ uygunsuz bir toplamdır. Çünkü $5+6=11$ durumunda $xy=30$ olacaktır, ki $30=2 \times 15$ nedeniyle $x+y=17$ toplamını verecektir. Bu tür birden fazla bileşen elemek gerekir. Çünkü böyle bir durum, Ç'yi ikileme düşürdü ve "şimdi buldum" diyemezdi.

