30. ULUSLARARASI MATEMATİK OLİMPİYADININ CEVAPLARI

Prof. Dr. Okay ÇELEBİ*

3) $k \geqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$ olduğunu varsayalım. S nin bir P noktasını alalım. P ye uzaklıkları aynı olan ve S de bulunan en az k tane nokta vardır. Yani AP = BP olan en az $\binom{k}{2}$ tane A,B nokta çifti vardır. S deki her P için bu özellik doğru olduğundan en az $n\binom{k}{2}$ tane A,B nokta çifti vardır, öyle ki AB'nin orta dikmesi üzerinde S nin en az bir noktası bulunsun. Yani

$$n\binom{k}{2} = n\frac{k(k-1)}{2} \geqslant \frac{n}{2}\left(\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{2n}-\frac{1}{2}\right)$$

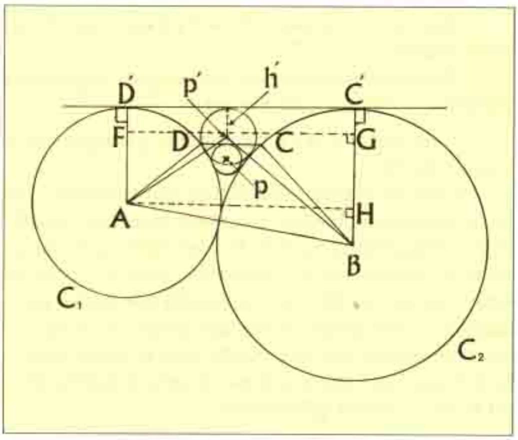
$$= \frac{n}{2}\left(2n-\frac{1}{4}\right)$$

$$= n\left(n-\frac{1}{8}\right)$$

$$> n(n-1)$$

$$= 2\binom{n}{2}$$

dir. $\binom{n}{2}$, mümkün olan bütün A,B çiftlerinin sayısı olduğundan öyle bir A,B çifti ve $P_1, P_2, \dots, P_m$, $(m>2)$ noktaları vardır ki $AP_i = BP_i$, $i = 1,2,\dots,m$ dir. Yani bu $P_1, P_2, \dots, P_m$ noktaları aynı doğru üzerindedir. Bu ise problemin (i) koşuluna aykırıdır. O halde $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$ olmalıdır.



* ODTÜ, Matematik Böl. Öğr. Üyesi ve TÜBİTAK Olimpiyat Ekibi Hazırlama Grb. Başkanı.

4) (Yarışmada bronz madalya alan Tolga Güney'in çözümü)

A merkezli $|AD| = R_1$ yarıçaplı çember C_1, B merkezli $|BC| = R_2$ yarıçaplı çember C_2 olsun. P merkezli h yarıçaplı çember ise verilen koşullara göre hem C_1 ve C_2 çemberlerine hem de DC doğrusuna teğettir.

C_1 ve C_2 nin ortak teğeti D′C′ olsun. D′C′ doğrusuna ve C_1, C_2 çemberlerine teğet olan çember P′ merkezli ve h′ yarıçaplı olsun. DC doğru parçası ABC′D′ dörtgeninin içindedir veya D′C′ ile çakışıktır. Dolayısıyla P merkezli h yarıçaplı çember ya D′C′ yü kesmez ya da D′C′ye teğettir.

Şimdi h′ yarıçapını R_1 ve R_2 cinsinden hesaplayalım. Bu amaçla önce P′den ve A dan D′C′ ye sırasıyla FG ve AH paralellerini çizelim.

$$|AF| = R_1 - h', \quad |AP'| = R_1 + h'$$
$$|BG| = R_2 - h', \quad |BP'| = R_2 + h'$$

olduğu açıktır. Şekilden

$$|FP'| + |P'G| = |FG| = |AH|$$

özelliği kolaylıkla görülebilir. Bu ise

$$\sqrt{|AP'|^2 - |AF|^2} + \sqrt{|BP'|^2 - |BG|^2} = \sqrt{|AB|^2 - |BH|^2}$$

veya

$$\sqrt{(R_1+h')^2-(R_1-h')^2} + \sqrt{(R_2+h')^2-(R_2-h')^2} =$$

$$\sqrt{(R_1+R_2)^2-(R_2-R_1)^2}$$

demektir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\sqrt{R_1h'} + \sqrt{R_2h'} = \sqrt{R_1R_2}$$

ya da

$$\frac{1}{\sqrt{h'}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}$$

elde edilir.

Öte yandan, C_1, C_2 çemberleri ve D′C′ ye teğet olan çember, verilen koşullara uyarak çizilebilecek en büyük yarıçaplı çemberdir. Çünkü, yine şekilden, kolaylıkla

$$|AP'| + |P'B| \geqslant |AP| + |PB|$$

veya

$$(R_1+h') + (R_2+h') \geqslant (R_1+h) + (R_2+h)$$

ve $h' \geqslant h$'dır. Böylece

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{h'}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}$$

ya da, istenen,

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{|AD|}} + \frac{1}{\sqrt{|BC|}}$$

sonucu bulunur.

Not: Bu problemi ekibimiz elemanlarından Nejat Çingi, A.Selma Çizmeci ve Mehmet Özhabeş de tam olarak çözmüştür.

5) (Yarışmada bronz madalya alan Tolga Güney'in çözümü)

Bir $n \in Z^+$ alalım ve $p > n+2$ olacak şekilde bir $p \in Z^+$ seçelim.

$$n+p > n+2+n$$

olduğundan,

$n+p > 2(n+1) > 2n > 2(n-1) > \ldots > 2.3 > 2.2$ dır.

Şimdi

$(n+p)!+2, \quad (n+p)!+3, \quad (n+p)!+4, \quad \ldots, \quad (n+p)!+n+1$

ardışık tamsayılarını ele alalım. Bu sayılardan hiçbiri bir asal sayının tam kuvveti değildir. Çünkü k, $2 \leqslant k \leqslant n+1$ koşuluna uyacak şekilde ise

$2k \leqslant 2n+2 < n+p$

olduğundan, uygun bir A sayısı için

$(n+p)! = A.2k.k$

yazılabilir. Yani $k^2 \mid (n+p)!$ dir. O halde

$$(n+p)!+k = k\left(\frac{(n+p)!}{k}+1\right) = k(A2k+1)$$

bulunur. k bir asal sayının tam kuvveti değilse $k.(A.2k+1) = (n+p)!+k$ da bir asal sayının kuvveti olamaz. Eğer k bir asal sayının tam kuvveti yani q asal olmak üzere $k = q^r$ ise

$k \nmid A.2k+1 \Rightarrow q \nmid A.2k+1$

dir. Dolayısıyla $k(A.2k+1)$ yine bir asal sayının tam kuvveti değildir.

Sonuç olarak $\forall\, n \in Z^+$ için bir $p > n+2$ tamsayısı aldığımızda

$(n+p)!+2, (n+p)!+3, \ldots, (n+p)!+n+1$

ardışık tamsayılarının hiçbiri bir asal sayının tam kuvveti değildir.

Not: Bu problemi ekibimiz elemanlarından Ümit Kumcuoğlu da tam olarak çözmüştür.

6) (Yarışmada gümüş madalya alan Ümit Kumcuoğlu'nun çözümü)

Önce P koşulunu sağlayan permütasyonları göz önüne alalım. Bu halde $1 \leqslant a \leqslant n$ için a ile a+n yan yanadır. O halde bu yanyana olan elemanlar

$(1, n+1), (2, n+2), \ldots, (n, 2n)$ ikilileri ile verilecektir. Bu ikililerden bir tanesi $\binom{n}{1} = n$ şeklinde seçilebilir. (a,a+n) ikilisini bir tek eleman kabul edip, bütün permütasyonlarını (2n—1)! ile verebiliriz. a ile a+n nin kendi arasındaki yer değiştirmesini de hesaba katarsak, bir tane (a,a+n) ikilisinin yanyana olabileceği bütün permütasyonlar $2 \times \binom{n}{1} \times (2n-1)! = (2n)!$ olur. Ancak bu işlemde iki tane ikilinin yan yana geldiği permütasyonlar iki defa sayılmıştır. Dolayısıyla bu fazlalığı çıkarmamız gerekir. İki tane (a, a+n) ikilisinin yan yana geldiği permütasyonların sayısı

$2^2 \times \binom{n}{2} \times (2n-2)!$

dir. Bu kez de üç tane ikilinin yan yana geldiği permütasyonları da çıkarmış olduk. Yani bu hali toplama katmamız gerekir. Bunların sayısı ise

$2^3 \times \binom{n}{3} \times (2n-3)!'$

dir. Şimdi de dört tane ikilinini yan yana geldiği permütasyonları bir kere de fazladan katmış olduk. Bu işleme böylece devam edersek; içerme-dışarma ilkesine göre P özelliğine sahip olan bütün permütasyonların sayısı

$$S = 2\binom{n}{1}(2n-1)! - 2^2\binom{n}{2}(2n-2)! + 2^3\binom{n}{3}(2n-3)! + \ldots + (-1)^{p+1}2^p\binom{n}{p}(2n-p)! + \ldots + (-1)^{n+1}2^n\binom{n}{n}n!$$

olur.

Şimdi S için bir alt sınır bulmalıyız. Önce S nin ardışık herhangi iki terimi için aşağıdaki özellik vardır.

$$2^p\binom{n}{p}(2n-p)! - 2^{p+1}\binom{n}{p+1}(2n-p-1)! = \frac{2^p\, n!\,(2n-p-1)!\,p(2n-p+1)}{(p+1)!(n-p)!} > 0$$

S nin alt sınırını bulmak için

$S(x) = 2^x\binom{n}{x}(2n-x)!$

gösterilimi kullanalım. Böylece

$$S = 2\binom{n}{1}(2n-1)! - 2^2\binom{n}{2}(2n-2)! + S(3) - S(4) + \ldots + (-1)^{n+1}S(n)$$

olur. n tek ise

$[S(3)-(S(4)] + [S(5)-S(6)] + \ldots + [S(n-2)-S(n-1)] + S(n) > 0$

ve n çift ise

$[S(3)-S(4)] + [S(5)-S(6)] + \ldots + [S(n-1)-S(n)] > 0$

dir. O halde

$S > 2\binom{n}{1}(2n-1)! - 2^2\binom{n}{2}(2n-2)!$

veya

$S > (2n-2)!\,2n^2$

dir. P özelliğine sahip olan permütasyonların S sayısı, bütün permütasyonların (2n)! sayısına bölünürse

$$\frac{S}{(2n)!} = \frac{(2n-2)!\,2n^2}{(2n)!} = \frac{n}{2n-1} > \frac{1}{2}$$

bulunur. Yani P özelliğine sahip olan permütasyonların sayısı, bu özelliğe sahip olmayan permütasyonların sayısından fazladır.

Not: Bu soruyu ekibimiz elemanlarından Mehmet Aslan da tam olarak çözmüştür.

GÜNEŞ ENERJİSİ İLE DÖNEN DİŞLİLER

Fotoğrafta gördüğünüz bisiklet, geçtiğimiz haftalarda Batı Almanya'da geliştirildi. Tümüyle yeni bir buluş olan âlet güneş enerjisi ile çalışan pedaller yardımı ile yürümektedir. Bisikleti geliştirenlerden Jurgen Brammer, hız denemelerinden birinde görülmektedir.

Taşıyıcı üzerindeki güneş enerji modülüne gelen güneş enerjisi, elektrik enerjisine çevrilir. Daha sonra bu enerji, pedal gücüne ek olarak aracın hızını artırır.

Saatte 45 km hız yapabilecek bisikletin buluş sahibinin açıklamasına göre, eğer Güneş bulut içerisinde gizlenirse, modüldeki güneş enerji pilleri üç saat kadar daha aracın hızlanmasına yardım edebilecek.

New Scientist'ten çev.: Adnan YILMAZ