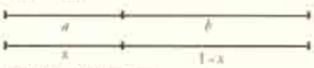
Mozart'ın Altın Müziği

Altın oran, doğada oldukça sık gösterir kendini bizlere. Bazen bir deniz yıldızında ya da nautilusda denizin içine girer, bazen de bir çam kozalağında, bir ayçiçeğinde ya da bitki gövdelerindeki yaprak dallanmalarında karşımıza çıkar. Belki de bu doğallığı, ressamları, mimarları ve bestecileri etkilemiş ve sanatçıların eserlerinde de karşımıza çıkmıştır. Ve 'Sanat bilerek ya da belki bilmeyerek doğayı taklit ediyor' denilebilir.

Altın oranın ne olduğuna gelince: Bir doğru parçasını, birbirine eşit olmayan öyle iki doğru parçasına ayıralım ki, kısa parçanın uzunluğunun, geri kalan parçanın uzunluğuna oranı, uzun parçanın uzunluğunun tüm doğru parçasının uzunluğuna oranına eşit olsun.



Şekil 1. Altın oran

Kolaylık sağlamak için doğru parçasının uzunluğu 1 ile, kısa parçanın uzunluğu da x ile gösterirsek istenen oran

$$\varphi = \frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1}$$

olur. Bu eşitliği çözersek,

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

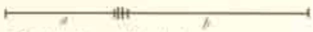
buluruz ve bu oran (ya da bunun çarpmaya göre tersi: $\varphi^{-1} = (\sqrt{5}+1)/2$) altın kesit, altın sayı ya da kutsal oran olarak da anılan altın orandır.

Biz bu yazıda tüm zamanların en büyük bestecilerinden W.A. Mozart'ın (1756-1791) piyano sonatlarıyla, altın oran arasındaki ilişkileri ele alacağız.

Mozart'ın müziğiyle biraz yakınlığı olan herkes, onun müziğindeki melodilerin yalnız zevk verici olmadığını, aynı zamanda kolaylıkla akılda kalabildiğini farketmiştir, çünkü bestecinin dehası, eserlerinde eşsiz biçimi ve dengesiyle de kendisini belli eder. Bir çoklarına göre Mozart'ın müziğinde çok mükemmel bir oran (H.Amiel), ve doğru şeyi, doğru zamanda ve doğru uzunlukta söylemenin yarattığı tat vardır (Eric Blom).

Mozart'ın matematiğe ilgi duyduğunu kızkardeşi anılarında anlatmıştır, öyle ki 14 yaşındayken Wolfgang kızkardeşinden, kendisine aritmetik tablolar ve aritmetik alıştırmaları göndermesini istemiştir (21 Nisan ve 19 Mayıs 1770 tarihli mektuplar). Mozart'ın *C majör Fantazi ve Füg*'ünü yazdığı nota sayfasının yanında, bir şans oyununda kazanma olasılığı ile ilgili yaptığı hesaplar da yer almaktadır.

Mozart, 18 yaşında piyano için ilk sonatını bestelemiştir. Mozart'ın piyano sonatlarının çoğunluğu üç bölümden oluşuyor ve Mozart'ın zamanında sonatın her bölümü iki kısıma ayrılıyordu. İlk kısımda müziksel tema belirtiliyor, ikinci kısımda ise tema geliştiriliyor ve tekrar başlangıçtaki gibi ortaya çıkıyordu. Kural olarak, çalışta, her kısım tekrarlanıyordu. Bu iki kısıma ayrılış, Mozart'ın eserlerinde bir ahenk yakalamıştı.



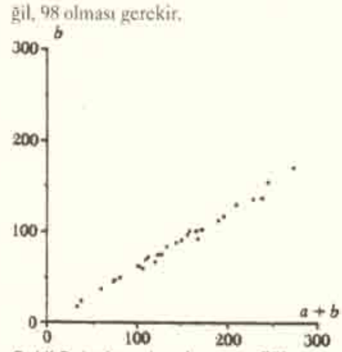
Şekil 2. Sonat biçimi

Tablo 1'de, Mozart'ın iki kısımlı sonat bölümlerinin uzunluklarına ilişkin bilgiler toplanmıştır. Bu tabloda a, giriş bölümünün uzunluğunu, b ise gelişme ve özet dediğimiz ikinci bölümün uzunluğunu belirtiyor.

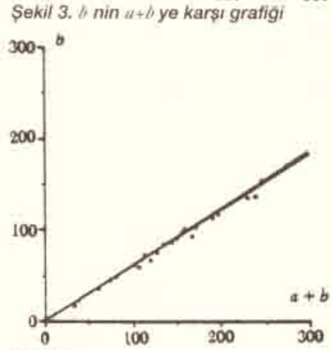
Birinci sütunda da eserin, Köchel sınıflandırmasına göre numarası yer alıyor. Birinci sonatın birinci bölümü (K.279, I) 100 birim uzunluktadır ve ikinci kısmın uzunluğu 62 birim olacak biçimde iki kısma ayrılır. Dikkat edilirse, 100φ sayısına en yakın tamsayı 62'dir. (Uzunluklar da aynı şekilde yuvarlanmış olarak tabloya yazılmıştır.) 100 ün altın orana en yakın biçimde iki doğal sayıya ayrıldığında, 62 ve 38 in elde edildiğini düşünürsek, K.279, I in altın orana göre mükemmel bir şekilde bölündüğünü söyleyebiliriz. Bu söylediklerimiz, bu sonatın ikinci bölümü (K.279, II) için de geçerlidir, yani 74 de, iki doğal sayıya, altın orana 28 ve 46 dan daha yakın olacak biçimde ayrılamaz. Ama Mozart, üçüncü bölümü tam anlamıyla altın orana uygun olarak bölmemiştir. En yakın bölmede b nin 102 değil, 98 olması gerekir.

Köchel	a	b	$a+b$
279, I	38	62	100
279, II	28	46	74
279, III	56	102	158
280, I	56	88	144
280, II	24	36	60
280, III	77	113	190
281, I	40	69	109
231, II	46	60	106
282, I	15	18	33
282, III	39	63	102
283, I	53	67	120
283, II	14	23	37
283, III	102	171	273
284, I	51	76	127
309, I	58	97	155
311, I	39	73	112
310, I	49	84	133
330, I	58	92	150
330, III	68	103	171
332, I	93	136	229
332, III	90	155	245
333, I	63	102	165
333, II	31	50	81
457, I	74	93	167
533, I	102	137	239
533, II	46	76	122
545, I	28	45	73
547a, I	78	118	196
570, I	79	130	209

Tablo 1



Şekil 3. b nin $a+b$ ye karşı grafiği



Şekil 4

Problem Seminerleri

Problemlere doğru çözüm sunan katılımcılara ödüller verilecektir. Ödül kazanabilmek için, yazılı ve tam çözümler, ilgili problem seminerinin başlamasından önce postayla ya da elden Problem Seminer Grubu'na iletilmelidir.

Her seminerdeki dört problemden birincisi 1, ikincisi 2, üçüncüsü 3, dördüncüsü ise 5 puan değerindedir. Her doğru için ödül verileceği gibi, bir dönem boyunca yapılacak yedi problem seminerinde aldıkları toplam puana göre ilk üç sırayı elde eden katılımcılara, toplam puanları 30 un üstünde ise, ayrıca dönem ödülleri verilecektir.

Matematik Problem Seminerleri, 1996 Sonbahar Döneminde de Ankara'da "TÜBİTAK Bilim Adamı Yetiştirme Grubu, Atatürk Bulvarı, No. 221 Kavaklıdere" adresinde yapılmaya devam edilecektir.

Çözümlerin iletileceği mektup adresi şöyledir:
Tübitak Bilim Adamı Yetiştirme Grubu,
Matematik Problem Seminerleri
Atatürk Bulvarı, No. 221
06100 Kavaklıdere- Ankara

Problem Semineri 96/13

4 Aralık 1996, Çarşamba, Saat: 15.30-17.30

1. Bir dikdörtgenin çevrel çemberi üzerinde alınan bir P noktasından, dikdörtgenin kenarlarına paraleller çiziliyor. Bu doğrulardan biri, dikdörtgenin iki kenarını A ve B noktalarında kesiyor. Diğer doğru da, dikdörtgenin diğer kenarlarının uzantılarını C ve D de kesiyor. AC nin BD ye dik ve $AC \cap BD$ nin dikdörtgenin köşegenlerinden birinin üzerinde olduğunu kanıtlayınız.

2. Bir üçgenin iç teğet çemberinin merkezi, o üçgenin ağırlık merkezi ile yüksekliklerinin kesişim noktasını birleştiren doğru üzerindeyse, bu üçgenin ikizkenar olduğunu kanıtlayınız.

3. Bir çemberin AB kirişi üzerinde bir O noktası alınıyor ve O dan geçen CD ve EF kirişleri çiziliyor. CF ve ED kirişlerini AB yi kestiği noktalardan A ile O arasında kalanına G diğerine H diyelim. Buna göre

$$\frac{1}{|GO|} - \frac{1}{|OH|} = \frac{1}{|AO|} - \frac{1}{|OB|}$$

olduğunu kanıtlayınız.

4. Bir ΔABC üçgeni ve $\angle BAC' = \angle B'AC$, $\angle ABC' = \angle A'BC$, $\angle A'CB = \angle ACB'$ ve üçü birden üçgenin iç bölgesinde ya da üçü birden üçgenin dışında bulunacak biçimde, A', B', C' noktaları veriliyor. AA', BB', CC' doğrularının aynı bir noktadan geçtiğini gösteriniz.

Problem Semineri 96/14.

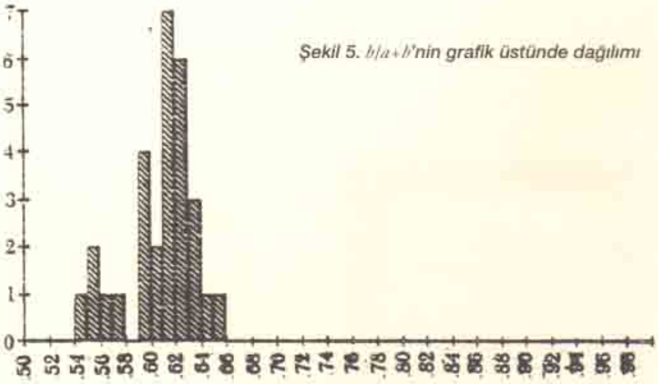
18 Aralık 1996, Çarşamba, Saat: 15.3017.30

1. İki asal sayının kuvvetleri ardışıksa, bu iki kuvvetin $2^3=8$ ve $3^2=9$ olması gerektiğini kanıtlayınız.

2. x ve y sıfırdan büyük tamsayılar, q ikiden büyük bir asal sayı ve $x^2-y^q=1$ ise 2 nin y yi, q nun da x i böldüğünü gösteriniz.

3. n üçten büyük bir tam sayı olmak üzere $x^2-y^n=1$ eşitliğinin pozitif tamsayılarda çözümü olmadığını kanıtlayınız.

4. p ve q tek asal sayılar, x ve y pozitif tamsayılar olmak üzere $x^p-y^q=\pm 1$ olsun. p nin y yi, q nun da x i böldüğünü kanıtlayınız.

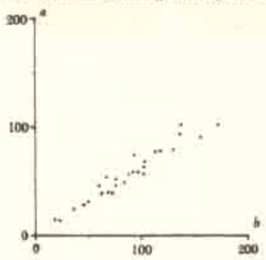


Şekil 5. $b/a+b$'nin grafik üstünde dağılımı

Bu verileri kullanarak, b nin $a+b$ ye karşılık grafiğini çizersek, noktaların neredeyse doğrusal olduğunu gözlemleriz.

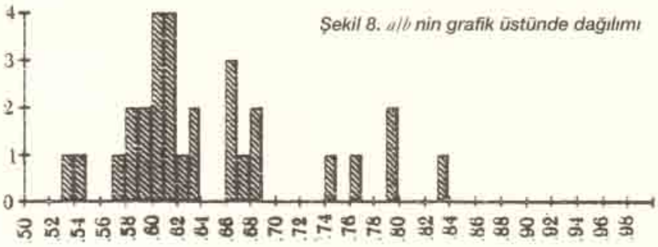
Şimdi bu grafiğe, $y=\varphi x$ doğrusunu ve noktaların en yakın doğrusu olan $y=-0.003241+0.6091\,x$ doğrusunu ekleyelim (Şekil 4). Bu iki doğru arasındaki fark gerçekten de çok azdır. Doğal olarak, $y=\varphi x$, eğimi daha fazla olduğundan, biraz daha yukardadır. Son olarak $b/(a+b)$ oranının histogramının da (şekil 5), φ nin merkeziyetini gösterdiği açıktır.

Görüldüğü gibi Mozart, piyano sonatlarının bölümlerini, uzunluklarını oranı altın orana oldukça yakın olan kısımlara ayırmıştır. Ama emin olmadan önce, Tablo 1 deki verileri bir de başka yönden inceleyelim. Bir bölme, altın oranla ayrılmışsa, hem a/b nin hem de $b/(a+b)$ nin φ ye yakın olması gerekir. Biraz önce $b/(a+b)$ oranını inceledik, şimdi de a/b oranını göz önüne alalım ve a nın b ye göre grafiğini çizelim (Şekil 6). Grafikten de görüleceği gibi noktalar yine bir doğruya yakın olacak biçimde dağılmışlardır ama bu yakınlık Şekil 3 teki kadar değildir. $y=\varphi x$ ve noktaların en yakın doğrusu olan $y=1.360+0.6260x$ doğrusunu çizersek (Şekil 7), bu iki doğrunun birbirine (Şekil 4 teki kadar olmasa da) oldukça yakın olduğunu görebiliriz. a/b oranının histogramı (şekil 8) ise, Şekil 5 ten çok daha fazla dağınıklık göstermektedir ve bu histogramda φ nin merkeziyeti, Şekil 5 te olduğu kadar açık değildir.



Şekil 6. a nın b ye karşı grafiği

Şekil 7



Şekil 8. a/b nin grafik üstünde dağılımı

Acaba $b/(a+b)$ oranı neden φ ye a/b den daha yakın? Bu, elimizdeki verilere özgü bir durum mu, yoksa her zaman geçerli mi? Yanıtı hemen verelim: $b/(a+b)$, φ ye a/b den her zaman daha yakındır.

Teorem. $0 \le a \le b$ olmak üzere

$$\left|\frac{b}{a+b}-\varphi\right| \le \left|\frac{a}{b}-\varphi\right|$$

dir.

Kanıt. $x=a/b$ olsun. Şimdi, her $x\in[0,1]$ için

$$\left|\frac{1}{x+1}-\varphi\right| \le |x-\varphi|$$

olduğunu göstermemiz gereklidir. $f(x)=1/(x+1)$ olsun. Ortalama Değer Teoreminden, her $x\in[0,1]$ için x ile φ arasında öyle bir $\xi\in[0,1]$ vardır ki

$$|f(x)-f(\varphi)| = |f'(\xi)||x-\varphi|$$

dir.

$$f'(x) = -1/(x+1)^2,$$

her $x\in[0,1]$ için

$$\frac{1}{4} \le |f'(x)| \le 1$$

eşitsizliklerini sağlar. Basit bir hesaplamayla $f(\varphi)=\varphi$ olduğu görülebilir. Böylece, her $x\in[0,1]$ için

$$\left|\frac{1}{x+1}-\varphi\right| \le |x-\varphi|$$

dir ve eşitlik $x=\varphi$ olduğu durumda sağlanır. Bu teoremin bize söylediği başka bir şey de şudur: Fibonacci dizisine benzer her dizinin (a ve b nin ikisi birden sıfır değil ve $f_1=a$, $f_2=b$, $f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$) ardışık iki teriminin birbirine oranı φ ye yakınsar.

Aytek Erdil

Bilkent Matematik Topluluğu

Kaynaklar

Putz, J. F., "The Golden Section and The Piano Sonatas of Mozart", *Mathematics Magazine*, October 1995

http://helios.augustana.edu/crosslhf/moz/pics/

Çözmece

Bu ayın soruları

1. $(x+2)^n-x^n=3^n+5^n$ eşitliğini sağlayan tüm x ve n tamsayılarını bulunuz.

2. $f(x)$ ve $g(x)$, $f(x^2+x+1)=g(x)f(x)$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı polinomlar olsun. $f(x)$ in çift dereceli olduğunu gösteriniz.

Geçen ayın çözümleri

1. a,b,c den herhangi biri sıfıra eşitken, eşitsizliğin doğruluğu açıkça görülür. Üçü de sıfırdan büyükse, OB kenarı a birim, OA kenarı b birim ve $\widehat{BOA}$ açısı 120 derece olan ΔOAB üçgenini düşünelim. $\hat{O}$ açısının açıortayı üzerinde $|OC|=c$ olacak biçimde C noktasını aldığımızda, kosinüs teoreminden

$$|BC|=\sqrt{a^2+c^2-ac}$$

$$|AC|=\sqrt{b^2+c^2-bc}$$

$$|AB|=\sqrt{a^2+b^2+ab}$$

olur. Şimdi, A, B, C noktaları için üçgen eşitsizliğini yazalım: $|AB|\le|BC|+|CA|$ dır ve bu da istenen eşitsizliktir.

2. m, n, k soruda verilen koşulları sağlamak üzere, m kız, n erkek içeren bir gruptan, k kişilik bir ekip kaç değişik biçimde seçilebilir? Ekibin i kişisi kız olsun dersek

$$\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

değişik şekilde seçilebilir. O zaman yapılabilecek tüm seçimlerin sayısı

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

toplamıdır. Aynı zamanda biz $m+n$ kişiden k kişinin

$$\binom{m+n}{k}$$

değişik biçimde seçilebileceğini biliyoruz. O zaman bu iki ifade birbirine eşittir ve soruda verilen eşitlik doğrudur.

Bu köşeyle ilgili her türlü öneri ve eleştirilerinizi lütfen bize yazın.

Mektup adresi
TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi,
Matematik Dünyası Köşesi,
Atatürk Bulvarı, No. 221,
06100, Kavaklıdere, Ankara
e-posta: bms@fen.bilkent.edu.tr