Müzik ve Simetri

Dr. Mahir E. Ocak [*TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi*

Simetrinin matematikteki yansıması olan grup teorinin fizik ve kimyada pek çok uygulama alanı bulunuyor. Zor hesapları basitleştirmek, kuramları formüle etmek ve hatta yeni kuramlar geliştirmek için grup teoriden yararlanılır. Peki simetrinin müzikte de önemli bir yer tuttuğunu, besteleri analiz etmek ve hatta yeni besteler yapmak için grup teoriden de yararlanılabileceğini biliyor muydunuz?

İnsanların kulağına hoş gelen besteler yapmanın yolu, birbiriyle ahenkli sesler bulmaktan geçiyor. Ancak hangi seslerin birbiriyle ahenkli olduğunu bulmanın genel geçer bir yolu olduğu söylenemez. Farklı tür müziklerde kullanılan birbirlerinden farklı ses sistemleri var. Dolayısıyla söz konusu olan müzik ve simetri olduğunda öncelikle hangi tür müzikten bahsedildiğinin belirtilmesi gerekiyor. Bu yazının devamında klasik Batı müziğinde kullanılan ses sistemine odaklanacağız. İnceleyeceğimiz gruplar ise kısaca *T/I* ve *PLR* olarak adlandırılan dihedral gruplar olacak.

Dihedral Gruplar

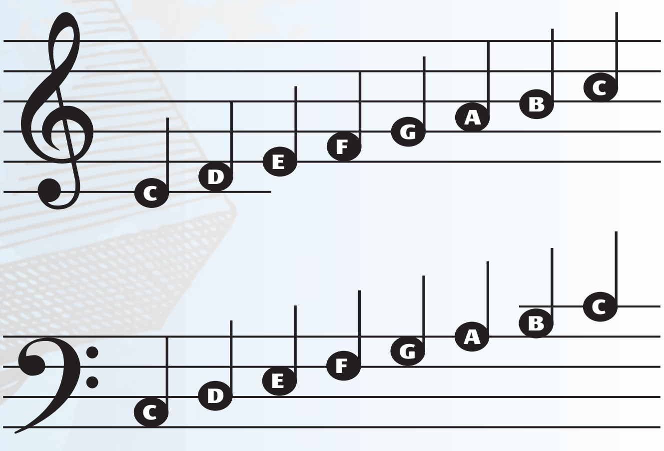
Dihedral grupların tanımını yapmadan önce simetri ve grup kavramlarını ele alalım. Bir nesnenin simetrik olması çeşitli işlemler uygulandığında yapısında/görünümünde bir değişiklik olmadığı anlamına gelir. Frucht teoremi olarak adlandırılan bir teorem de herhangi bir grubun bir grafiğin yapısında/görünümünde değişikliklere sebep olmayan simetri işlemlerini içeren bir küme olduğunu söyler. Dihedral gruplar da eşkenar çokgenlere uygulanabilecek tüm simetri işlemlerinden oluşur. n kenarlı bir eşkenar çokgenin simetri grubu D_n olarak adlandırılır ve derecesi $2n$'dir ($2n$ tane simetri işlemi içerir).

Yazının devamında hem *T/I* hem de *PLR* gruplarının D_{12} grubuyla izomorfik (eş biçimli) olduğunu göreceğiz. D_{12} grubu adından da anlaşılabileceği gibi eşkenar onikigenlere uygulanabilecek tüm simetri işlemlerinden oluşur. Bu grupta toplam 24 ayrı simetri işlemi vardır: Eşkenar onikigeni merkezinden geçen ve bulunduğu düzleme dik bir eksen etrafında 30, 60, 90, ... 360 derece döndürürseniz yapısında/görünümünde herhangi bir değişiklik olmaz.

Ayrıca eşkenar onikigenin karşılıklı iki köşesinden ya da karşılıklı iki kenarının ortalarından geçen ve çokgenin bulunduğu düzleme dik hayalî düzlem aynalardaki yansımaları da çokgenin görünümünü değiştirmez. Bu işlemler karşılıklı iki noktadan geçen eksenler etrafında 180 derecelik dönme hareketi olarak da düşünülebilir.

12’li Ses Sistemi

Klasik Batı müziğinde kullanılan ses sisteminde 12 ayrı nota sınıfı vardır. Her bir nota sınıfında frekansı birbirlerinin tam katları olan sesler bulunur. Örneğin frekansı 110, 220, 440, 880 ... olan sesler la ya da *A* diye adlandırılır. Aynı ses sınıfından ardışık iki nota arası bir oktav olarak tanımlanır. Bir oktav içerisindeki 12 notanın frekansları arasında belirli bir ilişki vardır.



Sol ve fa anahtarlarında notalar

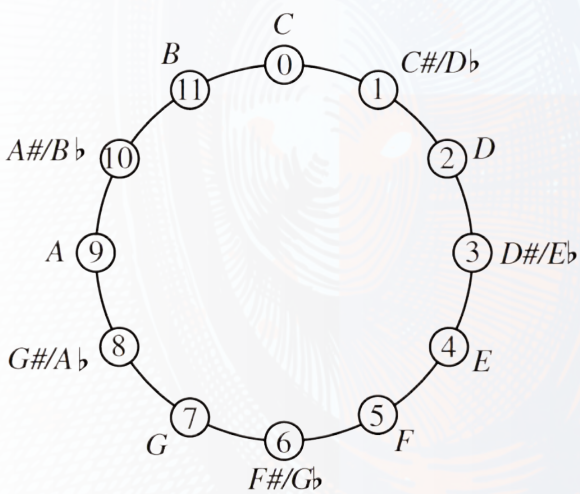
Bir oktav içindeki ardışık iki nota arasında yarım ses olduğu söylenir. Bu notalardan daha tiz olanın frekansı daha pes olanın frekansının $\sqrt[12]{2}$ katıdır. Dolayısıyla aralarında 5 yarım ses olan notaların frekans oranı $(\sqrt[12]{2})^5$, aralarında 8 yarım ses olan notaların frekans oranı ise $(\sqrt[12]{2})^8$’dir. Aralarında bir oktav (12 yarım ses) olan iki notanın frekansları oranı da beklendiği gibi $(\sqrt[12]{2})^{12} = 2$’dir.

Pisagor’a atfedilen bir görüşe göre, iki sesin frekanslarının oranı ne kadar basitse sesler o ölçüde ahenklidir. Bu görüşe göre birbiri ile en ahenkli sesler, frekanslarının oranları 3/2, 4/3, 5/4 gibi basit oranlar olan seslerdir. Klasik Batı müziğindeki ses sistemine baktığımızda, tam olarak bu oranlara değil ama bunlara çok yakın değerlere rastlarız. Örneğin, aralarında beş yarım ses olan notaların frekans oranı $(\sqrt[12]{2})^5 = 1,3348 \approx 4/3$, aralarında dört yarım ses olan notaların frekans oranları $(\sqrt[12]{2})^4 = 1,2599 \approx 5/4$, aralarında üç yarım ses olan notaların frekans oranları $(\sqrt[12]{2})^3 = 1,1892 \approx 6/5$, aralarında yedi yarım ses olan notaların frekans oranları da $(\sqrt[12]{2})^7 = 1,4983 \approx 3/2$’dir. Frekans oranlarının basit oranlara çok yakın olması nedeniyle aralarında 3, 4, 5 ve 7 yarım ses olan notaların klasik müzik bestelerinde eş zamanlı olarak bir arada kullanılmasına sıklıkla rastlanır. Bazı notalar içinse tam tersi doğrudur. Örneğin aralarında altı yarım ses olan notaların frekans oranı $(\sqrt[12]{2})^6 = 1,4142 \approx 7/5$’tir. 3/2, 4/3 gibi oranlara kıyasla, 7/5 basit bir oran olarak görülmez. Zaten bir arada kullanılmaları durumunda da aralarında altı yarım ses olan notalar kulağımıza pek ahenkli gelmez. Bu yüzden aralarında altı yarım ses olan notaların eş zamanlı olarak kullanılması pek rastlanılan bir durum değildir.

0	*C*	Do
1	*C#, D♭*	Do diyez, re bemol
2	*D*	Re
3	*D#,E♭*	Re diyez, mi bemol
4	*E*	Mi
5	*F*	Fa
6	*F#, G♭*	Fa diyez, sol bemol
7	*G*	Sol
8	*G#, A♭*	Sol diyez, la bemol
9	*A*	La
10	*A#, B♭*	La diyez, si bemol
11	*B*	Si

Sayılarla çalışmak sembollerle çalışmaktan daha kolaydır. Bu yüzden müzikteki simetriye geçmeden önce notaları sayılarla eşleştireceğiz. Do (*C*) notasından başlayarak notaları 0'dan 11'e kadar sayılarla gösterelim (*bkz*. yukarıdaki tablo). Böylece iki nota arasında kaç yarım ses olduğunu hesaplamamız kolaylaşacak ve modüler aritmetik kullanarak notalarla işlemler yapabileceğiz. Örneğin mi (4) sesinin beş yarım ses yukarısında, 4+5 = 9 olduğu için, la (9) sesi vardır.

Bir sol sesi (7) ile üst oktavdaki mi sesi (4) arasında, 4-7 = 9 mod 12 olduğu için, dokuz yarım ses vardır. Bu işlemleri görselleştirmenin bir yolu da notaları bir "müzik saati"nin üzerine dizmektir.



Müzik saati

Majör ve Minör

Bir melodide 12 farklı notanın tamamı değil, gam olarak adlandırılan bir alt kümesi bulunur. Majör olarak adlandırılan gamlarda notaların aralıkları iki tam, bir yarım, üç tam, bir yarım şeklindedir. Başka bir deyişle n-majör gamında n, n+2, n+4, n+5, n+7, n+9 ve n+11 notaları bulunur. Örneğin sol majör gamında şu notalar vardır: 7, 9, 11, 0, 2, 4, 6. Si bemol majör gamında ise şu notalar vardır: 10, 0, 2, 3, 5, 7, 9. Minör olarak adlandırılan gamlarda ise nota aralıkları bir tam, bir yarım, üç tam, bir yarım, bir tam şeklindedir. Başka bir deyişle n-minör gamında n, n+2, n+3, n+5, n+7, n+9 ve n+10 notaları bulunur. Örneğin re minör gamında şu notalar vardır: 2, 4, 5, 7, 9, 11, 0. Fa diyez minör gamındaki notalar ise şunlardır: 6, 8, 9, 11, 1, 3, 4.

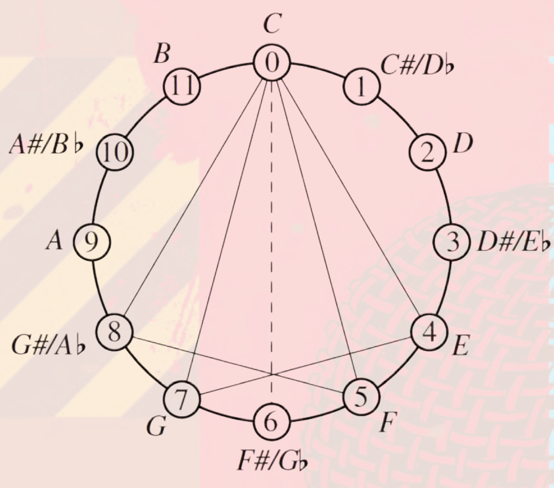
Eş zamanlı çalınan çok sayıda sesten oluşan harmonik ses kümelerine akor denir. Üç sesli majör ve minör akorlarda o majör ya da minör gamdaki 1., 3., ve 5. notalar yer alır. Başka bir deyişle n-majör akoru n, n+4 ve n+7; notalarından n-minör akoru ise n, n+3 ve n+7 notalarından oluşur. Örneğin do majör akorunda 0 (do), 4 (mi) ve 7 (sol) notaları, mi minör akorunda ise 4 (mi), 7 (sol) ve 11 (si) notaları vardır.

T/I Grubu

İnceleyeceğimiz ilk grup *T/I*. Bu grup adını İngilizcede "yer değiştirme" anlamına gelen "*transposition*" ve "tersinme" anlamına gelen "*inversion*" kelimelerinden alıyor. Adından da anlaşılabileceği gibi *T/I* grubunda yer değiştirme ve tersinme işlemleri var. Öncelikle 0-11 aralığındaki tam sayılara (notalara) uygulanacak bu işlemlerin tanımını yapalım:

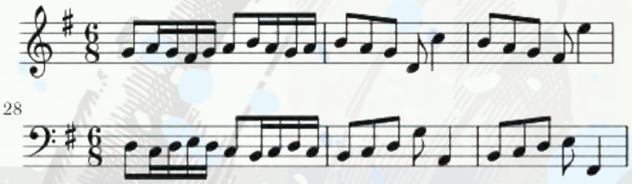
n, 0 ile 11 arasında bir tam sayı olmak kaydıyla
$T_n(x) := x + n \bmod 12$
$I_n(x) := -x + n \bmod 12$

n sayısının alabileceği her bir değere karşılık gelen 12 ayrı T_n ve 12 ayrı I_n işlemi vardır. Bu gruptaki simetri işlemlerini müzik saati üzerinde kolaylıkla gözlemleyebiliriz. T_n işlemleri her bir notayı n yarım ses yukarı taşır. Örneğin T_2 işlemi 0'ı 2'ye, 1'i 3'e, 2'yi 4'e ... taşır. Bu işlemi D_{12} grubundaki dönme işlemlerine benzetebiliriz. T_n işlemleri müzik saatini 30*n derece döndürür. T_2 işleminin sonucunu bulmanın bir yolu müzik saatini 30*2=60 derece döndürmektir. Benzer biçimde, T_5 işlemi de müzik saatini 30*5=150 derece döndürür. I_n işlemleri ise D_{12} grubundaki yansıma işlemlerine benzer ve müzik saatindeki notaların çeşitli düzlem aynalardaki yansımalarını hesaplar. Örneğin I_0 işlemi 0'ı 0'a, 1'i 11'e, 2'yi 10'a ... taşır. Bu işlemi görselleştirmenin bir yolu müzik saatindeki notaları 0 ve 6'dan geçen hayalî bir düzlem aynada yansıtmaktır. Benzer biçimde, I_3 işlemi 0'ı 3'e, 1'i 2'ye, 3'ü 0'a ... taşır. Bu işlemi görselleştirmenin bir yolu da müzik saatindeki notaları 1 ile 2'yi ve 7 ile 8'i birleştiren yayların orta noktalarından geçen bir düzlem aynada yansıtmaktır. *T/I* grubundaki tersinme işlemleri de D_{12} grubundaki yansıma işlemleri gibi kendi kendilerinin tersidir. Aynı işlem art arda iki kez uygulandığında tüm notalar başlangıçtaki konumlarına geri döner.

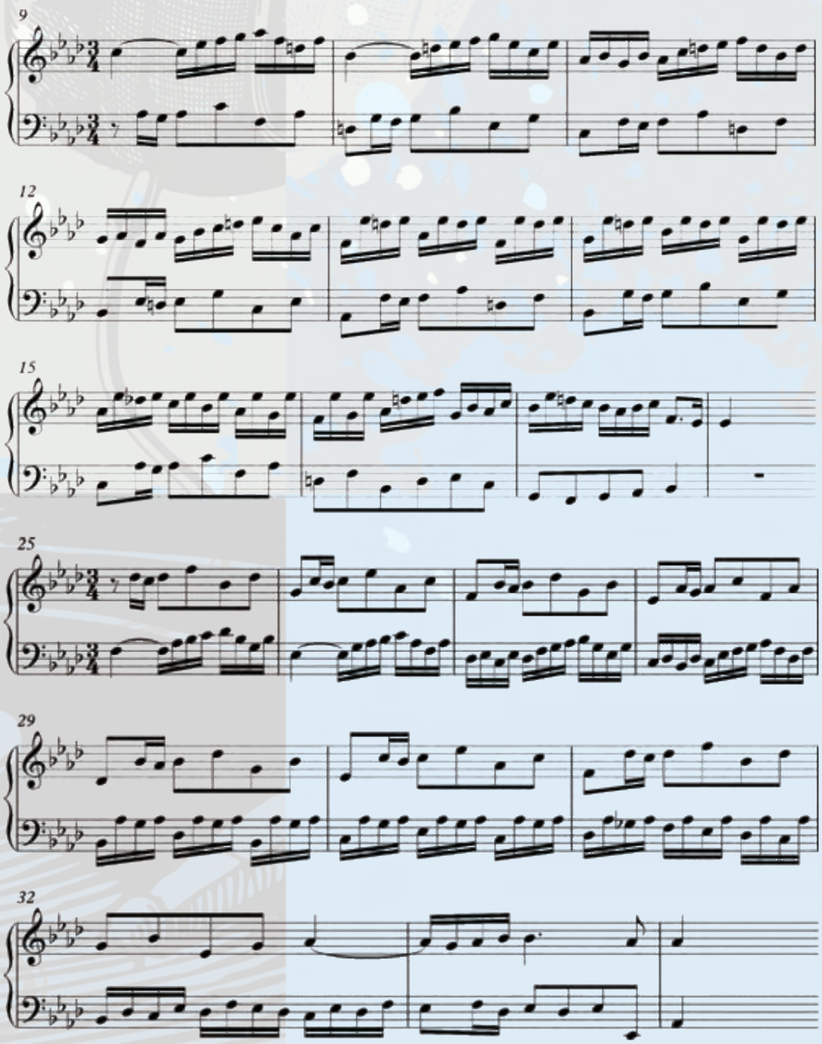


C=<0, 4, 7> (do majör) akoruna I_0 işlemi uygulandığında sonuç *f*=<0, 8, 5> (fa minör) akoru olur.

T/I grubundaki simetrilerin bulunduğu melodilerin örneklerine füglerde sıklıkla rastlanır. Özellikle Alman besteci John Sebastian Bach ile anılan bu tür klasik müzik eserlerinde başlangıçta sunulan bir müzikal tema, transpoze edilmiş (tüm notalar eşit miktarda yer değiştirmiş) ya da tersinmiş biçimlerde farklı aralıklarla tekrarlanır.



John Sebastian Bach'ın *Well Tempered Clavier* seçkisinde yer alan bir fügden kısımlar. Başlangıçta sunulan müzikal tema 28 numaralı kısımda tersinmiş olarak tekrar ediliyor.



John Sebasitan Bach'ın *Well Tempered Clavier* seçkisinde yer alan bir fügden kısımlar. 9. bölümden sonra başlayan melodi 29. bölümden sonra tekrar edilirken sol anahtarıyla yazılmış (üst satırdaki) notalar ile fa anahtarıyla yazılmış (alt satırdaki) notalar yer değiştiriyor.

T/I grubundaki simetrileri üç sesli akorlara uyguladığımızda, tıpkı notalarda olduğu gibi bir grup yapısı ile karşılaşırız. *T/I* grubundaki işlemler, bir majör ya da minör akoru alarak başka bir majör ya da minör akora taşır (*bkz*. sağdaki tablo).

Güzel bir melodi bulmak için farklı akorlar arasında nasıl gezinilebileceğine *PLR* grubunu inceledikten sonra değineceğiz.

Majör Üçlüler	Minör Üçlüler
C = <0, 4, 7>	<0, 8, 5> = *f*
C#=D♭= <1, 5, 8>	<1, 9, 6> = f# = *g♭*
D = <2, 6, 9>	<2, 10, 7> = *g*
D#=E♭= <3, 7, 10>	<3, 11, 8> = g# = *a♭*
E = <4, 8, 11>	<4, 0, 9> = *a*
F = <5, 9, 0>	<5, 1, 10> = a# = *b♭*
F# = *G♭* = <6, 10, 1>	*<6, 2, 11>* = *b*
G = <7, 11, 2>	*<7, 3, 0>* = *c*
G# = *A♭* = <8, 0, 3>	<<8, 4, 1> = *c#* = *d♭*
A = <9, 1, 4>	<9, 5, 2> = *d*
A# = *B♭* = <10, 2, 5>	<10, 6, 3> = *d#* = *e♭*
B = <11, 3, 6>	<11, 7, 4> = *e*

Majör ve minör üçlülerdeki notalar. Yaygın kullanıma uygun biçimde majör akorlar büyük harflerle, minör akorlar küçük harflerle gösteriliyor. T_n işlemleri her bir akoru aynı sütunun *n* satır altındaki (mod 12) akora taşıyor. I_n işlemleri ise her bir akoru diğer sütunun *n* satır altındaki (mod 12) akora taşıyor. Tablodaki verilerin doğruluğunu T_n ve I_n işlemlerini üçlülerdeki notalara tek tek uygulayarak kontrol edebilirsiniz. Ör: $T_2E = T_2\langle 4, 8, 11\rangle = \langle T_2(4), T_2(8), T_2(11)\rangle = \langle 6, 10, 1\rangle$.

PLR Grubu

PLR grubunu tartışmaya başlamadan önce $\langle y_1, y_2, y_3\rangle$ olarak ifade edeceğimiz üç sesli majör ve minör akorlar üzerinde P, L ve R olarak adlandıracağımız üç adet simetri işlemi tanımlayacağız.

$$P\langle y_1, y_2, y_3\rangle = I_{y1+y3}\langle y_1, y_2, y_3\rangle,$$
$$L\langle y_1, y_2, y_3\rangle = I_{y2+y3}\langle y_1, y_2, y_3\rangle,$$
$$R\langle y_1, y_2, y_3\rangle = I_{y1+y2}\langle y_1, y_2, y_3\rangle.$$

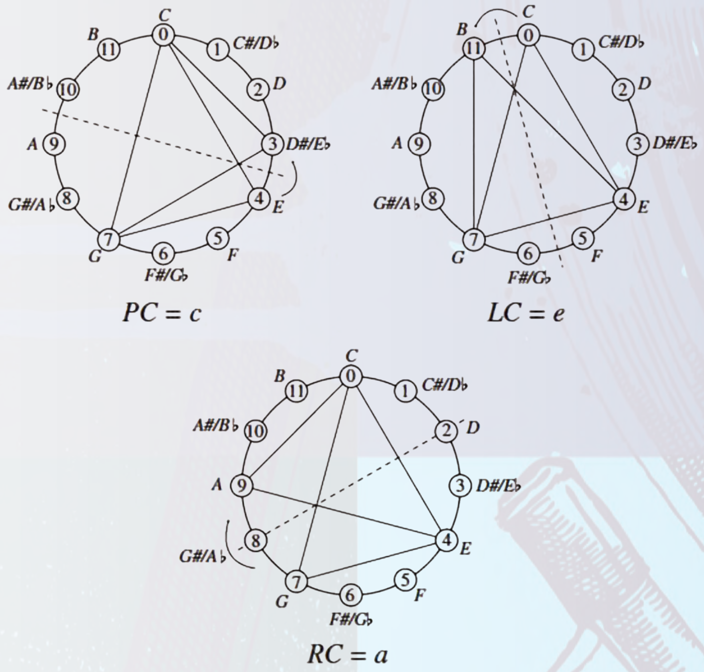
I_n adlı tersinme işleminin tanımını *T/I* grubundan bahsederken vermiştik. Müzik saatine bakarak bu tersinme işlemlerinin ne yaptığını görebiliriz. *P* işlemi $(y_1+y_3)/2$ ile $((y_1+y_3)/2)+6$ noktalarından geçen eksene göre, *L* işlemi $(y_2+y_3)/2$ ile $((y_2+y_3)/2)+6$ noktalarından geçen eksene göre, *R* işlemiyse $(y_1+y_2)/2$ ile $((y_1+y_2)/2)+6$ noktalarından geçen eksene göre yansıtma yapıyor. Bu yansıma işlemleri sonucunda üç sesli akorlardaki iki nota aynı kalıyor, sadece bir tanesi değişiyor. Örneğin:

$P(C) = P\langle 0, 4, 7\rangle = \langle 7, 3, 0\rangle = c,$
$P(E) = P\langle 4, 8, 11\rangle = \langle 11, 7, 4\rangle = e,$
$L(B\flat) = L\langle 10, 2, 5\rangle = \langle 9, 5, 2\rangle = d,$
$L(A) = L\langle 9, 1, 4\rangle = \langle 8, 4, 1\rangle = c\#,$
$R(G\flat) = R\langle 6, 10, 1\rangle = \langle 10, 6, 3\rangle = d\#,$
$R(F) = R\langle 5, 9, 0\rangle = \langle 9, 5, 2\rangle = d.$

P, L ve R işlemlerinin her biri kendi kendinin tersidir. Bu işlemler herhangi bir akora art arda iki kez uygulandığında yine aynı akor bulunur (bunu doğrulayabilirsiniz). Daha önce PLR grubunun D_{12} grubu ile izomorfik olduğunu belirtmiştik. Bu durumu görmenin bir yolu LR işlemine odaklanmak. Önce R sonra da L işlemini üç sesli bir majör akora uyguladığımızda şu sonucu buluyoruz:

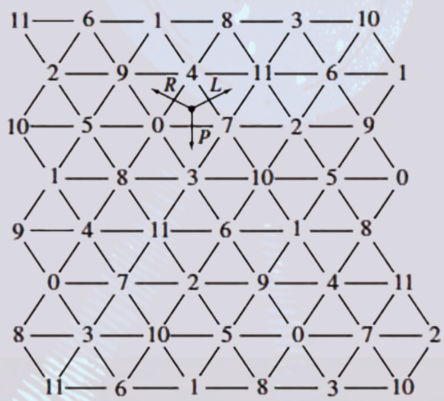
LR n-majör $= LR \langle n, n+4, n+7\rangle = L \langle n+4, n, n+9\rangle = L\,(n+9)$-minör $= \langle n+5, n+9, n\rangle = (n+5)$-majör.

LR işlemi herhangi bir major akoru 5 yarım ses yukarı taşıyor. Başka bir deyişle LR işlemi müzik saatindeki herhangi bir akoru 150 derece döndürüyor. Herhangi bir majör akordan başlayarak ve bu işlemi art arda uygulayarak 12 majör akorun tamamını elde etmek mümkün. Benzer bir biçimde, herhangi bir minör akordan başlanarak ve LR işlemi art arda uygulanarak herhangi bir minör akor da elde edilebilir. LR işlemini, D_{12} grubundaki 30 derece döndürme işlemine benzetebiliriz. Benzer biçimde P, L veya R işlemlerinden herhangi biri de D_{12} grubundaki yansıtma işlemine benzetilebilir. P, L ve R işlemlerinin art arda uygulanmasıyla elde edilebilecek herhangi bir işlemi sadece LR ve L işlemlerini çeşitli kombinasyonlarda art arda uygulayarak da elde etmek mümkün.



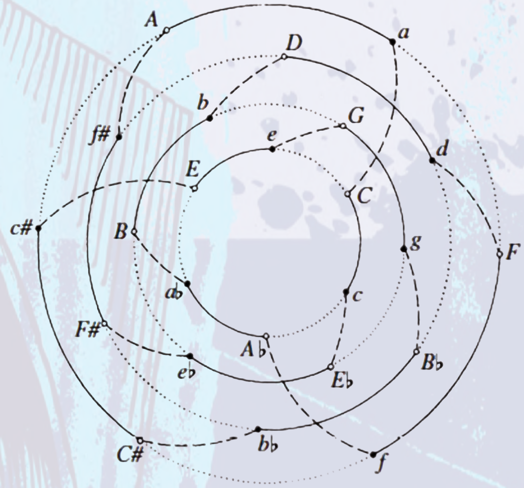
P, L ve R işlemleri C (do majör) akoruna uygulandığında c (do minör), e (mi minör) ve a (la minör) akorları elde ediliyor.

Peki PLR grubu hangi grafiğe uygulanabilecek simetri işlemlerini içeriyor? Bu sorunun cevabı Oettingen/Riemann *tonnetz*'i. *Tonnetz* kelimesi Almancada ses ağı anlamına gelir. Oettingen/Riemann *tonnetz*'i de notaların üçgenlerin köşelerine yerleştirildiği bir grafiktir (*bkz*. aşağıdaki grafik). Bu grafikteki her bir üçgenin köşelerinde üç sesli majör ve minör akorlardaki notalar yer alır. *P, L* ve *R* işlemleri de bu üçgenleri bir kenarlarından geçen eksenler etrafında 180 derece döndürür (ya da bu eksenlerden geçen düzleme dik düzlem aynalarda yansıtır). Örneğin <0, 4, 7> notalarından oluşan do majör akorunu ele alalım. Önce *tonnetz*'de 0, 4 ve 7 notalarından oluşan üçgeni bulalım. Bu üçgeni R işlemi uygulayarak 0 ve 4 notalarından geçen eksen etrafında 180 derece döndürdüğümüzde; köşelerinde 0, 4, 9 notaları bulunan üçgeni yani la minör akorunu elde ederiz. Benzer biçimde do majör üçgeninin *P* işlemini uygulayarak 0 ve 7 notalarında geçen eksen etrafında 180 derece döndürdüğümüzde; köşelerinde 0, 3 ve 7 notaları bulunan do minör üçgenini buluruz. Benzer biçimde do majör üçgenini *L* işlemini uygulayarak 4 ve 7 notalarından geçen eksen etrafında 180 derece döndürdüğümüzde ise köşelerinde 4, 7 ve 11 notaları bulunan üçgeni, yani mi minör akorunu buluruz.

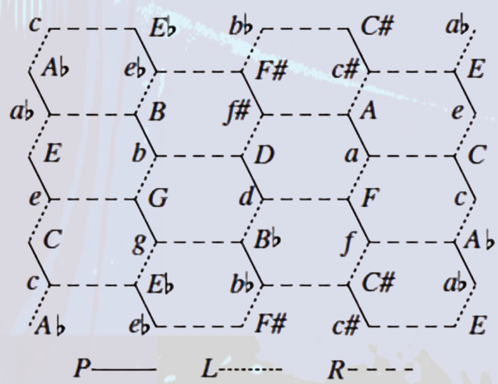


Oettingen/Riemann *tonnetz*'i. Ses ağındaki her bir üçgen, üç sesli bir akora karşılık gelir. Komşu üçgenler *P, L* ve *R* simetrileriyle bağlantılıdır.

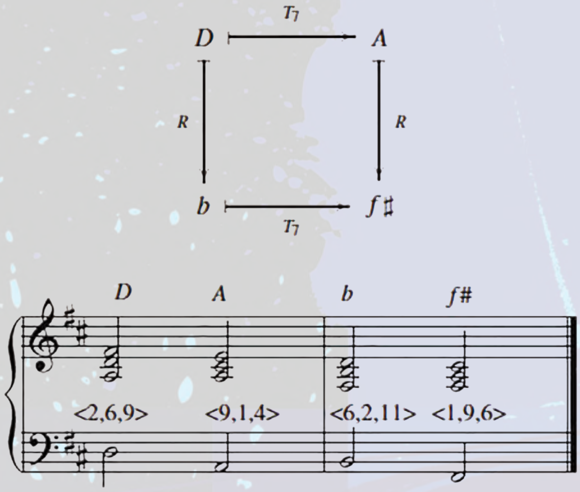
Peki Oettingen/Riemann *tonnetz*'i ne işe yarar? Bu ses ağında neden *P, L* ve *R* simetrileriyle bağlantılı olan akorlar bir arada yer alır? Bir beste yapmaya çalıştığınızı düşünün. İnsanların kulağını tırmalamadan farklı melodi parçalarını birbirine nasıl bağlayabilirsiniz? Yaygın olarak kabul gören görüş, farklı parçalar arasındaki ses değişiminin mümkün olduğunca az olmasıdır. Oettingen/Riemann *tonnetz*'i de aralarında çok az fark olan üç sesli akorları bulmanın kolay bir yolunu sağlar: *P, L* ve *R* simetrileriyle ilişkili iki akorun ikişer notası aynı, birer notası farklıdır. Pek çok klasik müzik bestesinde art arda gelen melodi parçalarındaki akorların *PLR* simetrileriyle bağlantılı olduğunu görmek mümkündür.



Waller *tonnetz*'i. Oettingen/Riemann *tonnetz*'ine alternatif olan bu *tonnetz*'de bir akora *P, L* ve *R* simetrileri uygulandığında elde edilecek akorlar sürekli, kesikli ve noktalı çizgilerle gösteriliyor.



Douthett ve Setinbach *tonnetz*'i. *P, L* ve *R* simetriyle bağlantılı üç sesli akorların bir başka grafiksel gösterimi.



Johann Pachelbel'in *Canon in D* adlı eserinden bir kısım. Ardışık iki kısımdaki akorlar T_7 ve *R* simetrileriye bağlantılı.

Johann Pachelbel'in *Canon in D* adlı eserinden bir kısım. Ardışık iki kısımdaki akorlar T_7 ve *R* simetrileriye bağlantılı.

Sonuç

Matematik ve müzik arasındaki ilişki üzerine yüzlerce yıldır çalışmalar yapılıyor. Günümüzde kümeler teorisinden soyut cebire, aritmetikten topolojiye kadar pek çok matematik alanından hem var olan besteleri daha iyi anlamak hem de yeni besteler yapmak için yararlanılıyor. Grup teori de müzikte alanında uygulamaları olan bir matematik dalı.

Bu yazıda konu edilen çeşitli simetri örnekleri aslında müzikte karşılaşılan simetrilerin çok küçük bir kısmını örneklendiriyor.

Hem sanat hem de simetri güzellikle ilişkilendirilen kavramlardır. Dolayısıyla, yaptıkları besteleri güzelleştirmeye çalışan müzisyenlerin simetriden de yararlanıyor olması hiç de şaşırtıcı olmasa gerek. ■

Kaynak

Grans, A. S., ve ark., "Musical Actions of Dihedral Groups", *American Mathematical Monthly*, Cilt 116, p. 479-495, 2009.